Plenum uke 36.

Oppgaver: A2: 4, 2, 11

A3: 3, 5, 8

B: 1.6

2.4 La

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 12 & 31 \\ 5 & 3 & 14 \\ 14 & 17 & 44 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & 4 & 25 \\ 26 & 4 & 23 \\ 33 & 5 & 26 \end{bmatrix}$$

$$AB \neq BA$$

2.2

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 3 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \\ 6 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 5 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

a) (antall rader) $\times$ (antall kolonner)

A er en 3×2 matrise.

B: (2×2), C: (3×3), D: (2×3)

E: (3×3)

b) Avgjør om uttrykkene er definert. Regn ut.

1) AB $\quad (3\times 2)(2\times 2) \sim (3\times 2)$

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 3 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 27 & 8 \\ 25 & 8 \end{bmatrix}$$

(DA $(2\times 3)(3\times 2) \sim (2\times 2)$

2) AB + C $\quad$ Ikke definert.

3) 3E $\quad$ Definert.

$$3E = 3 \begin{bmatrix} 9 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 5 & 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & 3 & 6 \\ 0 & 12 & 12 \\ 15 & 0 & 21 \end{bmatrix}$$

4) DA − B

$$DA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 3 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 & 8 \\ 28 & 14 \end{bmatrix}$$

$$DA - B = \begin{bmatrix} 32 & 8 \\ 28 & 14 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 29 & 7 \\ 21 & 12 \end{bmatrix}}}$$

5) $BD + A$

$BD: \ (2\times2)(2\times3) \sim (2\times3)$

$A: \ (3\times2)$ Ikke er definert.

6) $ABD + 2CE$

$ABD: \ (3\times2)(2\times2)(2\times3) \sim (3\times3)$

$CE: \ (3\times3)(3\times3) \sim (3\times3)$.

3.3 Løs likningssystemene ved bruk av Gauss-Jordan-eleminasjon.

a) $$\begin{cases} 1x + 1y + 1z = 8 \\ 2x - 1y + 0z = 4 \\ 1x - 1y + 3z = 2 \end{cases}$$

Den utvidede matrisen til likningssystemet er

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 2 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} -1 \quad -2 \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 2 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & -3 & -2 & -12 \\ 0 & -2 & 2 & -6 \end{bmatrix} \cdot -\frac{1}{3}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 4 \\ 0 & -2 & 2 & -6 \end{bmatrix} \cdot 2 \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 4 \\ 0 & 0 & \frac{10}{3} & 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{3}{10}$$

$$\left(2 \cdot \frac{2}{3} + 2 = \frac{4}{3} + \frac{6}{3} = \frac{10}{3}\right) \qquad 8 - \frac{3}{5} = \frac{40}{5} - \frac{3}{5} = \frac{37}{5}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \cdot -\frac{2}{3} \cdot -1 \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{37}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{18}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{5} \end{bmatrix} -1$$

trappeform $\qquad \left(4 - \frac{\cancel{2}\,2}{5\,\cancel{3}} = \frac{20-2}{5} = \frac{18}{5}\right.$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{19}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{18}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \Longrightarrow \quad x = \frac{19}{5},\ y = \frac{18}{5} \quad z = \frac{3}{5}$$

$$L = \left\{\left(\frac{19}{5}, \frac{18}{5}, \frac{3}{5}\right)\right\}.$$

3.3b

$$\begin{cases} 2x + 2y + 4z = 16 \\ x + y + z = 4 \\ -x + y + 2z = 6 \end{cases}$$

Den utvidede matrisen har formen

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & 16 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Finner trappeformen først.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & 16 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \tfrac{1}{2} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} -1 \quad 1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & 4 & 14 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 2 & 4 & 14 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot \tfrac{1}{2} \\ \cdot -1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot -2 \quad -2 \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot -1$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 4 \end{cases}$$

$$L = \{(1, -1, 4)\}$$

3.5 Løs likningssystemene:

a) $\begin{cases} 2x - y + z = 6 \\ y - z = 2 \\ x + 3y + 4z = 8 \\ x + y + 2z = 4 \end{cases}$

Den utvidede matrisen har formen:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 8 \\ 2 & -1 & 1 & 6 \end{bmatrix} \; -1 \; -2$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -3 & -2 \end{bmatrix} \cdot -2 \; +3 \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 4 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{4}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 4 \end{bmatrix} \cdot 6 \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$0x + 0y + 0z = 4$ Har ingen løsning!

3.8

$$L: \begin{cases} (4-a)x + 10y = 0 \\ \frac{1}{10}x + (4-a)y = 0 \end{cases}$$

For hvilke a har likningssystemet minst en ikke-triviell løsning?

Koeffisient matrisen til L er

$$A = \begin{bmatrix} (4-a) & 10 \\ \frac{1}{10} & (4-a) \end{bmatrix}$$

Når $\det(A) \neq 0$ har L en entydig løsning. Dermed finnes ~~kun~~ den trivielle løsningen. Dersom $\det(A) = 0$ har systemet uendelig mange løsninger.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} (4-a) & 10 \\ \frac{1}{10} & (4-a) \end{vmatrix} = (4-a)^2 - 10 \cdot \frac{1}{10}$$
$$= 16 - 8a + a^2 - 1$$
$$= a^2 - 8a + 15$$

$$a = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{2} = 4 \pm 1$$

$$\det(A) = a^2 - 8a + 15 = (a-3)(a-5)$$

$$\det(A) = 0 \iff a \in \{3, 5\}$$

For $a \in \{3, 5\}$ finnes en ikke-triviell løsning.

3 1.6

Beregn determinanten:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & a & -21 \\ 3 & 7 & a \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} a & -21 \\ 7 & a \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & -21 \\ 3 & a \end{vmatrix}$$

$$+ 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & a \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= 1\left(a^2 - (-21)\cdot 7\right) - 2\left(-a + 3\cdot 21\right) + 3\left(-7 - 3a\right)$$

$$= a^2 + \cancel{7\cdot 21} + 2a - \cancel{6\cdot 21} - \cancel{21} - 9a$$

$$= a^2 - 7a = a(a-7)$$

b)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ -x_1 + a x_2 - 21 x_3 = 2 \\ 3x_1 + 7x_2 + a x_3 = 3 \end{cases}$$