Plenum 3/9 uke 36

Oppgaver: A2: 4, 2, 11
A3: 3, 5, 8
B1: 6

2.4 La

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 10 & 12 & 31 \\ 5 & 3 & 14 \\ 14 & 17 & 44 \end{bmatrix}$$

(Skriv opp etter hverandre! Pek med pekestokk

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & 4 & 25 \\ 26 & 4 & 23 \\ 33 & 5 & 26 \end{bmatrix}$$

2.2 La A, B, C, D og E være følgende matriser:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 3 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \\ 6 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 5 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

a) Hva er størrelsene på matrisene?
(antall rader) × (antall kolonner)

A er en 3×2 matrise.
B " 2×2 "
C " 3×3 "
D " 2×3 "
E " 3×3 "

b) Avgjør om følgende uttrykk er definert, og regn ut.

1) AB: $(3 \times \underline{2})(\underline{2} \times 2) \to (3 \times 2)$ √ Definert

Kolonner i A er samme som rader i B

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 3 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 27 & 8 \\ 25 & 8 \end{bmatrix}$$

2) $AB + C$ Ikke definert!

3) $3E$ (skalar ganger matrise)

$$3E = 3 \begin{bmatrix} 9 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 5 & 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & 3 & 6 \\ 0 & 12 & 12 \\ 15 & 0 & 21 \end{bmatrix}$$

4) $DA - B$ $\quad DA : (\underline{2} \times 3)(3 \times \underline{2}) \rightsquigarrow (2 \times 2)$

Definert!

$$DA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 3 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 & 8 \\ 28 & 14 \end{bmatrix}$$

$$DA - B = \begin{bmatrix} 32 & 8 \\ 28 & 14 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 29 & 7 \\ 21 & 12 \end{bmatrix}}}$$

5/ BD + A

BD : $\underset{B}{(2\times 2)}\underset{D}{(2\times 3)} \Rightarrow (2\times 3)$ matrise. BD er en

A er (3×2) matrise. <u>Ikke definert.</u>

6/ ABD + 2CE

Er ABD definert? Dimensjons regning.

$$\underset{A}{(3\times 2)}\underset{B}{(2\times 2)}\underset{D}{(2\times 3)} \Rightarrow ABD \text{ er } (3\times 3)$$

CE er $(3\times 3)(3\times 3) = (3\times 3)$

$$(AB)D = \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 27 & 8 \\ 25 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 28 & 68 \\ 16 & 59 & 151 \\ 16 & 57 & 141 \end{bmatrix}$$

$$2CE = 2\begin{bmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \\ 6 & 6 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 5 & 0 & 7 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 82 & 20 & 42 \\ 50 & 5 & 17 \\ 89 & 30 & 85 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 164 & 40 & 84 \\ 100 & 10 & 34 \\ 178 & 60 & 170 \end{bmatrix}$$

ABD + 2CE

$$= \begin{bmatrix} 8 & 28 & 68 \\ 16 & 59 & 151 \\ 16 & 57 & 141 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 164 & 40 & 84 \\ 100 & 10 & 34 \\ 178 & 60 & 170 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 172 & 68 & 152 \\ 116 & 69 & 185 \\ 194 & 117 & 311 \end{bmatrix}$$

2.11 Vis så mange av reglene i teorem 2.10 (s. 47) som du har lyst til.

?

Multiplikasjon er assosiativ. $(AB)C = A(BC)$

$A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$, $C = [c_{ij}]$

$(n_1 \times n_2)$ $(n_2 \times n_3)$ $(n_3 \times n_4)$

$$(AB)_{ij} = \sum_{k_1=1}^{n_2} a_{ik_1} b_{k_1 j}$$

litt vanskelig.

$$((AB)C)_{ij} = \sum_{k_2=1}^{n_3} (AB)_{ik_2} c_{k_2 j}$$

$$= \sum_{k_2=1}^{n_3} \sum_{k_1=1}^{n_2} a_{ik_1} b_{k_1 k_2} c_{k_2 j}$$

$$= \sum_{k_1=1}^{n_2} a_{ik_1} \underbrace{\left(\sum_{k_2=1}^{n_3} b_{k_1 k_2} c_{k_2 j} \right)}$$

$$= \sum_{k_1=1}^{n_2} a_{ik_1} (BC)_{k_1 j} = (A(BC))_{ij}$$

(Identitetsmatrisen er identitetselementet

$$AI = IA = A. \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2×2) tilfelle.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Generelt: $I = [\delta_{ij}]$, $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$.

$A = [a_{ij}]$.

$$(IA)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik} a_{kj} = a_{ij}.$$

$$(AI)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \delta_{kj} = a_{ij}.$$

Spørsmål: finnes det identitet for ikke kvadratiske matriser?

$(m \times n)$ $(n \times l)$

$$A(B+C) = AB + AC$$

$A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$, $C = [c_{ij}]$

$$(A(B+C))_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik} c_{kj} = (AB)_{ij} + (AC)_{ij}$$

3.3 Løs likningssystemene under ved å bruke Gauss-Jordan-eliminasjon

a) $\begin{cases} x + y + z = 8 \\ 2x - y = 4 \\ x - y + 3z = 2 \end{cases}$

Den utvidede matrisen til likningssystemet er

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 2 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Finner trappeform:

$$\begin{array}{c} -1 \quad -2 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 2 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & -3 & -2 & -12 \\ 0 & -2 & 2 & -6 \end{bmatrix} \cdot -\frac{1}{3}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 4 \\ 0 & -2 & 2 & -6 \end{bmatrix} 2 \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 4 \\ 0 & 0 & \frac{10}{3} & 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{3}{10}$$

$\frac{4}{3} + 2 = \frac{4}{3} + \frac{6}{3} = \frac{10}{3}$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

Finner redusert trappeform :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{5} \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ -\frac{2}{3} \quad -1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \frac{37}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{18}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{5} \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ -1 \\ \\ \end{array}$$

$$8 - \frac{3}{5} = \frac{40-3}{5} = \frac{37}{5}$$

$$4 - \frac{2}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{5} = 4 - \frac{2}{5} = \frac{20-2}{5} = \frac{18}{5}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{19}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{18}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{5} \end{array}\right] \Rightarrow \quad x = \frac{19}{5}, \; y = \frac{18}{5}, \; z = \frac{3}{5}$$

$$L = \left\{ \frac{1}{5}(19, 18, 3) \right\}$$

$$\frac{37}{5} - \frac{18}{5} = \frac{19}{5}$$

b) $\begin{cases} 2x + 2y + 4z = 16 \\ x + y + z = 4 \\ -x + y + 2z = 6 \end{cases}$

Den utvidede matrisen har formen

$$\cdot\tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & 16 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & 4 & 14 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Trappeform

Finner redusert trappeform

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$x = 1, \ y = -1, \ z = 4$

$L = \{(1, -1, 4)\}$

c) $\begin{cases} 2x - 3y + z = 5 \\ 3x + y + z = 15 \\ x + 5y + z = 3 \end{cases}$ 2.

Den utvidede matrisen har formen

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 15 \\ 1 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 15 \\ 2 & -3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} -3 \; -2 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & -14 & -2 & 6 \\ 0 & -13 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot -\frac{1}{14} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & -\frac{3}{7} \\ 0 & -13 & -1 & -1 \end{bmatrix} \; 13$$

trappeform

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & -\frac{3}{7} \\ 0 & 0 & \frac{6}{7} & -\frac{46}{7} \end{bmatrix} \cdot \frac{7}{6} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & -\frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{23}{3} \end{bmatrix} \cdot -\frac{1}{7} \; -1$$

$\frac{13}{7} - \frac{7}{7} = \frac{6}{7}$ $\quad -1 - \frac{13 \cdot 3}{7} = -\frac{7+39}{7} = -\frac{46}{7}$

$\frac{46}{6} = \frac{23}{3}$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & \frac{32}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{23}{3} \end{bmatrix} \; -5$$

$-\frac{3}{7} + \frac{23}{3} \cdot \frac{1}{7} = \frac{23-9}{21} = \frac{14}{21} = \frac{2}{3}$

$\frac{9+23}{3} = \frac{32}{3}$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{22}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{23}{3} \end{bmatrix} \qquad \frac{32}{3} - 5 \cdot \frac{2}{3} = \frac{22}{3}$$

$$\underline{\underline{(x, y, z) = \left(\frac{22}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{23}{3}\right)}}$$

3.5 Løs likningssystemene

a) $$\begin{cases} 2x - y + z = 6 \\ \quad y - z = 2 \\ x + 3y + 4z = 8 \\ x + y + 2z = 4 \end{cases}$$

Den utvidede matrisen til likningssystemet er

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 8 \\ 2 & -1 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} -1 \; -2 \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -2 \; 3 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 4 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{4} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 6 \\ \downarrow \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$0x + 0y + 0z = 4$

systemet er inkonsistent! Ingen løsning.

b) $\begin{cases} 2x + y - z = 5 \\ x - 5y + 7z = -14 \end{cases}$

Den utvidede matrisen har formen

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -5 & 7 & -14 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 & -14 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} -2 \\ \downarrow \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 & -14 \\ 0 & 11 & -15 & 33 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{11} \sim \begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 & -14 \\ 0 & 1 & -\frac{15}{11} & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ 5 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \overbrace{\left(7 - 5 \cdot \frac{15}{11}\right)}^{\frac{2}{11}} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{15}{11} & 3 \end{bmatrix}$$

$\left(7 - 5\frac{15}{11} = \frac{77 - 75}{11} = \frac{2}{11} \right.$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{11} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{15}{11} & 3 \end{bmatrix}$$

Vi kan nå lese av løsningen.

$$x + \frac{2}{11} z = 1$$

$$y - \frac{15}{11} z = 3$$

La $z = t$

$$x(t) = 1 - \frac{2}{11} t$$

$$y(t) = \frac{15}{11} t + 3$$

$$\mathcal{L} = \left\{ \left(1 - \frac{2}{11} t, 3 + \frac{15}{11} t, t \right) : t \in \mathbb{R} \right\}$$

3.8 Likningssystemet

$$L: \begin{cases} (4-a)x + 10y = 0 \\ \frac{1}{10}x + (4-a)y = 0 \end{cases}$$

(er homogent og har dermed alltid den trivielle løsningen). For hvilke verdier av a har (likningssystemet) L minst en ikke-triviell løsning

Koeffisientmatrisen til L er

$$A = \begin{bmatrix} 4-a & 10 \\ \frac{1}{10} & 4-a \end{bmatrix}$$

Nå det$(A) \neq 0$ har L en entydig løsning, mens dersom det$(A) = 0$ har systemet uendelig mange løsninger. ~~Altså~~ Altså finnes dersom det$(A) = 0$ en ikke triviell løsning.

$$\det(A) = (4-a)^2 - 10 \cdot \frac{1}{10}$$
$$= 16 - 8a + a^2 - 1$$
$$= a^2 - 8a + 15$$

abc-formelen gir

$$\det(A) = 0 \iff a = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 15}}{2}$$

$$a = \frac{8 \pm 2}{2} = 4 \pm 1$$

For $a \in \{5, 3\}$ har likningssystemet minst en ikke-triviell løsning.

B1.6 (Eksamensoppgave)

Beregn determinanten:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & a & -21 \\ 3 & 7 & a \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} a & -21 \\ 7 & a \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & -21 \\ 3 & a \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -1 & a \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= a^2 + 7 \cdot 21 - 2(-a + 3 \cdot 21) + 3(-7 - 3a)$$

$$= a^2 - 7a + 7 \cdot 21 - 6 \cdot 21 - 21$$

$$= \underline{\underline{a(a-7)}}$$

For hvilke verdier av a har likningssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ -x_1 + ax_2 - 21x_3 = 2 \\ 3x_1 + 7x_2 + ax_3 = 3 \end{cases}$$

nøyaktig en løsning.

Observer at koeffisient matrisen til systemet er gitt ved

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & a & -21 \\ 3 & 7 & a \end{bmatrix}.$$

Fra Teorem 3.13 (s. 69) følger at systemet har nøyaktig en løsning dersom $\det(A) \neq 0$.

$$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow a(a-7) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{a \notin \{0, 7\}}}$$