Oppgaver: A4: 3, 4, 7 B: 1.24

4.3 La $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$

a) Finn den karakteristiske likningen.

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 8 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 8 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 8 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(3-\lambda) - 0\cdot 8$$
$$= -(1+\lambda)(3-\lambda)$$
$$= (\lambda+1)(\lambda-3)$$
$$= \lambda^2 + \lambda - 3\lambda - 3$$
$$= \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

Den karakteristiske likningen er $\underline{\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0}$

b) Finn egenverdiene til A.

$$\det(A - \lambda I) = 0 \iff (\lambda+1)(\lambda-3) = 0$$

$\Rightarrow$ Egenverdiene til A er $-1, 3$.

c) Finn egenvektorene til A.

Vi må løse $(A - \lambda I)x = 0 \iff Ax - \lambda I x = 0$
$\iff Ax = \lambda x$

$\underline{\lambda = -1}$

$$A + I = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 8 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{\frac{1}{8}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 0 \quad , \quad x_2 = t$$
$$x_1 = -\frac{1}{2}t$$
$$\mathcal{L} = \left\{ t \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} ; t \in \mathbb{R} \right\}$$

$\underline{\lambda = 3}$ $(A - 3I)x = 0$

$$A - 3I = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 8 & 3 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -4x_1 + 0x_2 = 0 \\ 8x_1 + 0x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow x_1 = 0$, x_2 er fri. $x_2 = t$

$$\mathcal{L} = \left\{ t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

sep 10-12:10

La $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$

d) Finn den karakteristiske likningen.

$\det(B - \lambda I) = 0$

$$B - \lambda I = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 8 & -1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 8 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-1-\lambda) - 0 \cdot 8$$
$$= (\lambda - 3)(\lambda + 1)$$
$$= \lambda^2 - 3\lambda + \lambda - 3$$
$$= \underline{\underline{\lambda^2 - 2\lambda - 3}}$$

Kar. likn. er $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$

e) Finn egenverdiene. Egenverdiene er $\{3, -1\}$

f) Finn egenvektorene.

$\underline{\lambda = -1}$ $(B + I)x = 0$

$$B + I = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 0x_2 = 0 \\ 8x_1 + 0x_2 = 0 \end{cases}, \Rightarrow x_1 = 0, \ x_2 \text{ fri.}$$

$$L = \left\{ t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

$\underline{\lambda = 3}$ $(B - 3I)x = 0$

$$B - 3I = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 0x_1 + 0x_2 = 0 \\ 8x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases} \quad x_1 = \tfrac{1}{2}x_2, \ x_2 \text{ er fri.}$$

$x_2 = t$, $x_1 = \frac{1}{2}t$

$$L = \left\{ t \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

sep 10-12:38

4.4 La $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Finn egenverdiene og tilhørende egenvektorer

$\det(A - \lambda I) = 0$

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 1-\lambda \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (4-\lambda)(1-\lambda)^2 + 2(0) - 2(-1\cdot(1-\lambda))$$

$$= (4-\lambda)(1-2\lambda+\lambda^2) + 2(1-\lambda)$$

$$= 4 - 8\lambda + 4\lambda^2 - \lambda + 2\lambda^2 - \lambda^3 + 2 - 2\lambda$$

$$= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6$$

Hint ⇒ $= -(\lambda-1)(\lambda^2-5\lambda+6)$

Kar. likn $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$.

Egenverdier: $(\lambda-1)\underbrace{(\lambda^2-5\lambda+6)}=0$

$$\left(\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{5^2-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-2) = 0$$

Egenverdiene er $\{1, 3, 2\}$

4.7 x_n: Antall unge individer etter n sesonger.
y_n: Antall gamle individer etter n sesonger.

Vi antar $\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \frac{3}{2} y_n \\ y_{n+1} = \frac{1}{2} x_n \end{cases}$

a) Finn en 2×2 matrise M s.a

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} \quad n \geq 0$$

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_n + \frac{3}{2} y_n \\ \frac{1}{2} x_n + 0 y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Finn egenverdiene til M.

$\det(M - \lambda I) = 0$

$$M - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda) - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \lambda^2 - \lambda - \frac{3}{4}$$

Kar. likn: $\lambda^2 - \lambda - \frac{3}{4} = 0.$

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-\frac{3}{4})}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 2}{2}$$

Egenverdiene er $\left\{ \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\}$.

Finner egenvektorer.

$\lambda = \frac{3}{2}$ $\quad (M - \frac{3}{2} I) x = 0$

$$M - \frac{3}{2} I = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} - \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \cdot \cancel{-\tfrac{1}{2}} \cdot -2$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \quad x_1 - 3x_2 = 0$$

$x_2 = t \qquad x_1 - 3t = 0$

$x_1 = 3t$

$$\mathcal{L} = \left\{ t \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$M \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \overset{?}{=} \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad 3 + \frac{3}{2} = \frac{6+3}{2} = \frac{9}{2} = \frac{3}{2} \cdot 3$$

$$M \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 + \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \checkmark$$

$\lambda = -\frac{1}{2}$ $\quad (M + \frac{1}{2} I) x = 0$

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 + x_2 = 0$$

$x_2 = t$

$x_1 = -t$

$$\mathcal{L} = \left\{ t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

sep 10-13:16

b) Anta at $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}$

Vi har egenvektorene $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3k_1 - k_2 \\ k_1 + k_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

utvidede matrisen har formen:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot -3 \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & -4 & -20 \end{bmatrix} \cdot -\frac{1}{4}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \iff \begin{matrix} k_1 = 3 \\ k_2 = 5 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad M^2$$

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = MM \begin{bmatrix} x_{n-2} \\ y_{n-2} \end{bmatrix}$$

$$= \dots = M^n \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = M^n \left(3 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$= 3M^n \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + 5M^n \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= 3 \left(\frac{3}{2}\right)^n \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + 5 \left(-\frac{1}{2}\right)^n \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\left(M^2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = MM \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = M \left(\frac{3}{2}\right) \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right.$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right) M \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right) \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

c) Finn $\lim \frac{x_n}{y_n}$

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = 3\left(\frac{3}{2}\right)^n \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + 5\left(-\frac{1}{2}\right)^n \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_n = 3\left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot 3 + 5\left(-\frac{1}{2}\right)^n(-1)$$

$$= 9\left(\frac{3}{2}\right)^n - 5\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$y_n = 3\left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot 1 + 5\left(-\frac{1}{2}\right)^n \cdot 1$$

$$= 3\left(\frac{3}{2}\right)^n + 5\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\left(9\left(\frac{3}{2}\right)^n - 5\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\left(3\left(\frac{3}{2}\right)^n + 5\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

$$= \frac{9 - 5\left(-\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{2}{3}\right)^n}{3 + 5\left(-\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

$$= \frac{9 - 5\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{3 + 5\left(-\frac{1}{3}\right)^n} \xrightarrow[n \to \infty]{} \underline{\underline{3}}$$