Plenum uke 37. ($^{10}/_{9}$)

Oppgaver: A4: 3, 4, 7 B: 1.24.

Samlebygruppe VB Aud. 1 kl. 8.15-10

4.3 L_9 $\quad A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$

a) Finn den karakteristiske likningen til A.

$\det(A - \lambda I) = 0$, $\quad A - \lambda I = \begin{bmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 8 & 3-\lambda \end{bmatrix}$

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 8 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(3-\lambda) - 0 \cdot 8$$

$$= -(1+\lambda)(3-\lambda)$$

$$= (\lambda+1)(\lambda-3)$$

$$= \lambda^2 + \lambda - 3\lambda - 3$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

Den karakteristiske likningen til A er $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$.

b) Finn egenverdiene til A.
Vi må finne røttene i den karakteristiske likningen. Fra (a) har vi

$$\det(A-\lambda I) = (\lambda+1)(\lambda-3)$$

dette gir $\det(A-\lambda I)=0$ for $\lambda \in \{-1, 3\}$.

homogent system

c) Finn egenvektorene til A.
Vi må løse $(A-\lambda I)x = 0$ for $\lambda=-1$, $\lambda=3$.

"Hva skjer når λ ikke er en egenverdi?"

$\underline{\lambda=-1}$ $\quad A+I = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 0 \quad , \; x_2 = t$$

$$L = \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} t \, , \; t \in \mathbb{R} \right\}$$

som er egenvektorene tilhørende $\lambda=-1$.

$\underline{\lambda = 3}$ $\quad A - 3I = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 = 0$, x_2 er fri. Dette gir

$$L = \left\{ t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R} \right\}$$

Som er egenvektorene tilhørende egenverdien 3.

$$\text{La } B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

?

d) Finn den karakteristiske likningen til B. Den karakteristiske likningen er gitt ved $\det(B - \lambda I) = 0$.

$$\det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 8 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)(-1-\lambda)$$

$$= (\lambda - 3)(\lambda + 1).$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

e) Finn egenverdiene til B.

$$\det(B-\lambda I) = 0 \iff (\lambda+1)(\lambda-3) = 0.$$

Egenverdiene er $\{-1, 3\}$.

f) Finn egenvektorene til B.

$\underline{\lambda = -1}$ Må løse $(B+I)x = 0$.

Den utvidede matrisen har formen

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 = 0$, x_2 er fri.

Egenvektorene tilhørende -1 er

$$\left\{ t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

$\underline{\lambda = 3}$ $(B-3I)x = 0$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 8 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 - \frac{1}{2}x_2 = 0$, x_2 er fri.

Egenvektorene tilhørende $\lambda = 3$ er

$$\left\{ t \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

4.4 La

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Finn egenverdiene og de tilhørende egenvektorene til A.

Karakteristisk likning: $\det(A - \lambda I) = 0$.

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$+2 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 1-\lambda \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (4-\lambda)(1-\lambda)^2 + 2 \cdot 0 - 2(0 \cdot 0 - (1-\lambda)1)$$

$$= (4-\lambda)(1 - 2\lambda + \lambda^2) + 2(1-\lambda)$$

$$= (4-\lambda)(1-2\lambda+\lambda^2) + 2(1-\lambda)$$

$$= 4 - 8\lambda + 4\lambda^2 - \lambda + 2\lambda^2 - \lambda^3 + 2 - 2\lambda$$

$$= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6$$

Altså er den karakteristiske likningen

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0.$$

Finner egenverdier:

Hint $\Rightarrow$ $(\lambda-1)\underbrace{(\lambda^2-5\lambda+6)} = 0$

$$\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4\cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda-3)(\lambda-2)$$

$$(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-2) = 0$$

Dette gir egenverdiene $\{1, 3, 2\}$

Finner egenvektorer.

Ikke nødvendig å ta med sisteleddene siden dette er 0

$\underline{\lambda = 1}$ $\quad (A - \lambda I)x = 0$.

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} -3 \\ \leftarrow \\ \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dette gir oss $x_1 = 0$, $x_2 + x_3 = 0$

x_3 er fri.

$$\left\{ t \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

Sjekk:

$$A \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \checkmark$$

$\underline{\lambda = 3}$ $\quad (A - 3I)x = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 - 2x_3 = 0$ $\quad x_3$ er fri.

$x_2 = 0$ $\quad x_3 = t$

$$\left\{ t \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

Sjekk:

$$A \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \checkmark$$

$\underline{\lambda = 2}$ $(A - 2I)x = 0$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \tfrac{1}{2} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot (-1)$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 1$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 - x_3 &= 0 \\ x_2 &= 0 \end{aligned}$$

x_3 er fri.

Setter $x_3 = t$. $x_1 = t$, $x_2 = 0$, $x_3 = t$

$$\left\{ t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

4.7 x_n: Antall unge individer etter n sesonger.

y_n: Antall gamle individer etter n sesonger.

Vi antar $\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \frac{3}{2} y_n \\ y_{n+1} = \frac{1}{2} x_n . \end{cases}$

a) Finn en 2×2 matrise M slik at

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} \quad n \geq 0.$$

Fra antagelsen følger at

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_n + \frac{3}{2} y_n \\ \frac{1}{2} x_n + 0 y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$$

Altså er $M = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$.

Finner egenverdiene til M.
Den karakteristiske likningen er gitt ved $\det(M - \lambda I) = 0$.

$$M - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-\lambda & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(-\lambda) - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \lambda^2 - \lambda - \frac{3}{4}$$

$\Rightarrow$ Karakteristisk likning er

$$\lambda^2 - \lambda - \frac{3}{4} = 0.$$

Finner røtter:

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+3}}{2} = \frac{1 \pm 2}{2}, \quad \lambda \in \left\{ \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\}$$

Finner egenvektorer:

$\lambda = \frac{3}{2}$. $\left(M - \frac{3}{2}I\right)x = 0$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \overset{\cdot -2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \overset{-\frac{1}{2}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dermed har vi $x_1 - 3x_2 = 0$ og x_2 er fri. Setter $x_2 = t$. $\Rightarrow x_1 = 3t, x_2 = t$.

$$\left\{ t \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Sjekk:

$$M \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

✓

$\lambda = -\frac{1}{2}$ $\left(M + \frac{1}{2}I\right)x = 0$

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = -x_2, \; x_2 \text{ er fri.}$$

$$\left\{ t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

b) Anta $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}$. Finn et uttrykk for $\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$ ved å uttrykke $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ som en sum av egenvektorer for M.

Vi har egenvektorene $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$\lambda = \frac{3}{2}$ $\quad$ $\lambda = -\frac{1}{2}$

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \iff$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3k_1 - k_2 \\ k_1 + k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

Den utvidede matrisen er

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} -3 \\ \leftarrow \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & -4 & -20 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 8\\ 0 & 1 & 5\end{bmatrix}\begin{matrix}\leftarrow\\ -1\end{matrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 5\end{bmatrix}$$

Dermed har vi $k_1 = 3$, $k_2 = 5$.

Altså

$$\begin{bmatrix}x_0\\ y_0\end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}4\\ 8\end{bmatrix}$$

c) Finn $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$.

Vi har

$$\begin{bmatrix}x_n\\ y_n\end{bmatrix} = M\begin{bmatrix}x_{n-1}\\ y_{n-1}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x_{n-1}\\ y_{n-1}\end{bmatrix} = M\begin{bmatrix}x_{n-2}\\ y_{n-2}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}x_n\\ y_n\end{bmatrix} = M^2\begin{bmatrix}x_{n-2}\\ y_{n-2}\end{bmatrix} = M^3\begin{bmatrix}x_{n-3}\\ y_{n-3}\end{bmatrix} = \dots$$

Generellt har vi

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = M^n \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

$$= M^n \left(3 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$= 3\, M^n \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + 5 \cdot M^n \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Sidan $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ är en egenvektor tillhörande egenvärdet $\frac{3}{2}$ har vi

$$M^n \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = M^{n-1} M \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= M^{n-1} \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{3}{2} M^{n-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \cdots = \left(\frac{3}{2} \right)^n \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tilsvarende er $M^n \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Dette gir

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = 3\left(\frac{3}{2}\right)^n \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + 5\left(-\frac{1}{2}\right)^n \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x^n = 9\left(\frac{3}{2}\right)^n - 5\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$y^n = 3\left(\frac{3}{2}\right)^n + 5\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\frac{x^n}{y^n} = \frac{\left(9\left(\frac{3}{2}\right)^n - 5\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\left(3\left(\frac{3}{2}\right)^n + 5\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

$$= \frac{9 - 5\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\right)^n}{3 + 5\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\right)^n}$$

$$= \frac{9 - 5\cdot(-1)^n\left(\frac{1}{3}\right)^n}{3 + 5(-1)^n\left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

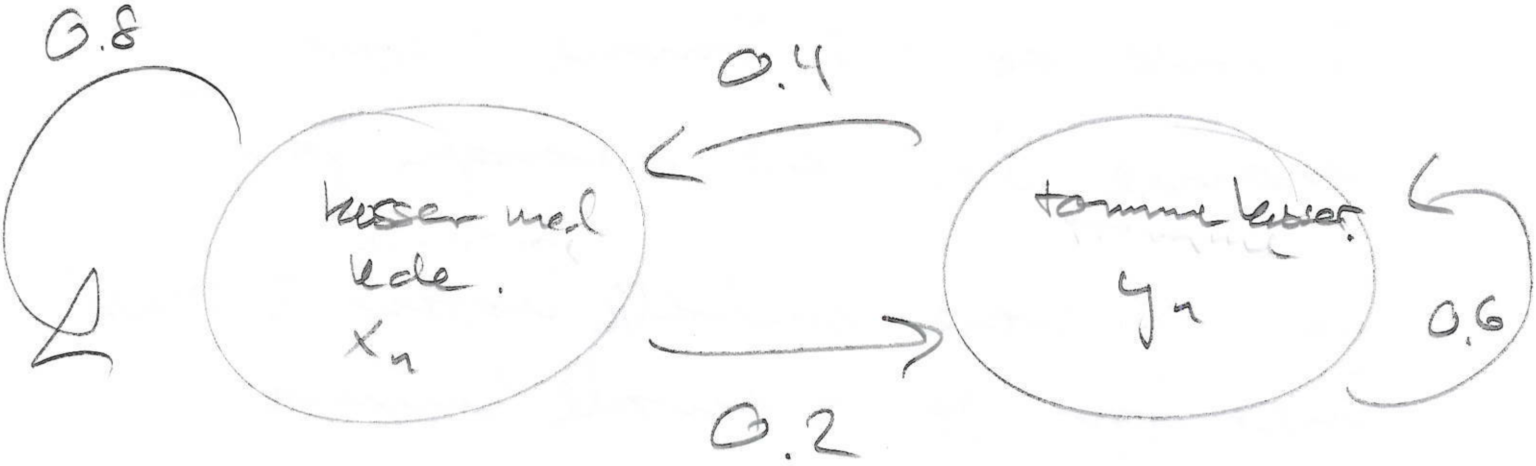
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 3$$

B 1.24

x_n: Antall kasser med hekkende fugl.

y_n: Antall tomme kasser.

Totalt er det 100 ~~kasser~~ ($x_n + y_n = 100$).



- "80% av kassene som er i bruk i en gitt sesong er i bruk neste sesong"
- "40% av de tomme kassene er i bruk neste ~~sesong~~."

$$x_{n+1} = 0.8x_n + 0.4y_n$$

$$y_{n+1} = 0.2x_n + 0.6y_n \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 \\ 0.2 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$$

Altså er overgangsmatrisen

$$M = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 \\ 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}$$

a) En sesong var det 60 kasser i bruk og 40 tomme. Hvor mange var det sesongen før?

La x være antall kasser i bruk året før, og y antall tomme kasser året før.

$$\begin{bmatrix} 60 \\ 40 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{(likningssystem!)}$$

Den utvidede matrisen har formen

$$\begin{bmatrix} \frac{8}{10} & \frac{4}{10} & 60 \\ \frac{2}{10} & \frac{6}{10} & 40 \end{bmatrix} \cdot \frac{10}{8} \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 75 \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 40 \end{bmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)$$

$$\begin{array}{l} 600 : 8 = 75 \\ -56 \\ 40 \\ -40 \\ 0 \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 75 \\ 0 & \frac{1}{2} & 25 \end{bmatrix} \cdot 2$$

$$-\frac{75}{5} + 40 = 40 - 15 = 25$$

$$\frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{6}{10} - \frac{1}{10} = \frac{1}{2}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 75 \\ 0 & 1 & 50 \end{bmatrix} \underset{-\frac{1}{2}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 50 \\ 0 & 1 & 50 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{x = 50 \quad , y = 50}}$$

Sjekk:

$$M\begin{bmatrix} 50 \\ 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 \\ 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 50 \\ 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 40 \end{bmatrix} \checkmark$$

b) Finn egenverdiene til M og vis at $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ er egenvektorer for M.

$$M\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 \\ 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.6 + 0.4 \\ 0.4 + 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Altså tilhører egenvektoren $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ egenverdien 1.

$$M\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 \\ 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ -0.4 \end{bmatrix} = 0.4\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$0.4 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$. Altså tilhører $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ egenverdien $\frac{2}{5}$.

c) Anta at $x_0 = 10$ og $y_0 = 90$.

Hvor mange kasser er i bruk etter n sesonger?

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 10 \\ 1 & -1 & 90 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 5 \\ 1 & -1 & 90 \end{bmatrix} \cdot -1$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 5 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 85 \end{bmatrix} \cdot -\frac{2}{3} \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 5 \\ 0 & 1 & -\frac{170}{3} \end{bmatrix} \cdot -\frac{1}{2}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{100}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{170}{3} \end{bmatrix}$$

$$5 + \frac{170}{6} = \frac{30 + 170}{6} = \frac{200}{6} = \frac{100}{3}$$

$$\Rightarrow k_1 = \frac{100}{3}, \quad k_2 = -\frac{170}{3}.$$

Nå har vi fra (4.9) s. 98

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = k_1 \lambda_1^n \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + k_2 \lambda_2^n \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$\left(\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \frac{2}{5}, \quad k_1 = \frac{100}{3}, \quad k_2 = -\frac{170}{3} \right)$$

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \frac{100}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{170}{3} \left(\frac{2}{5}\right)^n \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad x_n = \frac{100}{3} \cdot 2 - \frac{170}{3} \left(\frac{2}{5}\right)^n \cdot 1$$

$$\underline{\underline{x_n = 100 \left(\frac{2}{3} - \frac{17}{30} \left(\frac{2}{5}\right)^n \right)}}$$

Alternativ for å finne k_1 og k_2.
Cramers regel: (sparer tid for 2×2)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 90 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 1 & 90 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 = \underline{-3}$$

$\det(A_1) = 10 \cdot (-1) - 1 \cdot 90 = \underline{-100}$

$\det(A_2) = 2 \cdot 90 - 10 \cdot 1 = \underline{170}$

Cramers regel ger

$$k_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-100}{-3} = \underline{\underline{\frac{100}{3}}}$$

$$k_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{170}{-3} = \underline{\underline{-\frac{170}{3}}}$$