Oppgaver: A 5.2, A6: 3, 5, 7
B 2: 17, 19, 21, 29

5.2 Avgjør om følgene konvergerer eller divergerer. Finn eventuelt grensen.

a) $\left\{\frac{1}{n+1}\right\}_{n=0}^{\infty}$, $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$

Følgen konvergerer. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$.

b) $\{2n-3\}_{n=2}^{\infty}$, $1, 3, 5, \dots$ divergerer.

c) $\{2n+1\}_{n=0}^{\infty}$, samme følgen som i b.

d) $\{2n\}_{n=0}^{\infty}$, $0, 2, 4, 6, \dots$ divergerer.

e) $\left\{\frac{1}{n^2+n+2}\right\}_{n=0}^{\infty}$, $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ konvergerer mot 0.

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+n+2} = 0$.

f) $\{1000\}_{n=0}^{\infty}$, konvergerer mot 1000.

g) $\left\{\frac{(-1)^n}{2n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, konvergerer mot 0.

i) $\{(0,5)^n\}_{n=0}^{\infty}$, $1, 0{,}5, 0.25, 0.125, \dots$ konvergerer mot 0.

h) $\{(-1)^n\}_{n=0}^{\infty}$ divergerer.

6.5 Finn en løsning til den gitte differenslikningen med initialbetingelser.

a) $x_{n+1} - 2x_n = 2 \quad , \quad x_0 = 4$

Generell løsning.

Homogen likn: $x^h_{n+1} - 2x^h_n = 0$

$\Rightarrow \quad x^h_n = C\,2^n$

Partikulær løsning: Anta $x^s_n = A$

$x^s_{n+1} - 2x^s_n = 2 \overset{\text{"setter inn"}}{\Longrightarrow} A - 2A = 2, \quad -A = 2, \quad \underline{A = -2}$

Generell løsning: $x_n = x^h_n + x^s_n = C2^n - 2$.

Initial verdi $x_0 = 4 \Rightarrow C \cdot 2^0 - 2 = 4, \quad \underline{C = 4 + 2 = 6}$

$$\underline{\underline{x_n = 6 \cdot 2^n - 2}}$$

b) $x_{n+1} - x_n = -1 \quad , \quad x_0 = 0.$

Homogen likn: $x^h_{n+1} - x^h_n = 0, \quad x^h_n = C \quad , C \in \mathbb{R}.$

Partikulær løsning: Antar $x^s_n = An$

$x^s_{n+1} - x^s_n = -1 \Rightarrow A(n+1) - An = -1$

$\underline{A = -1}$

$x^s_n = -n.$

Generelle løsningen: $x_n = x^h_n + x^s_n = C - n.$

$x_0 = 0 \Rightarrow C - 0 = 0 \Leftrightarrow \underline{C = 0}$

$$\underline{\underline{x_n = -n}}$$

c) $x_{n+1} + \frac{1}{2}x_n = 2 \quad , \quad x_0 = 2$

Homogen likn: $x^h_{n+1} + \frac{1}{2}x^h_n = 0 \Rightarrow \underline{x^h_n = C\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$

Partikulærløsning: Anta $x^s_n = A$

$A + \frac{1}{2}A = 2, \quad \frac{3}{2}A = 2 \quad , \underline{A = \frac{4}{3}}$

Generell løsning: $\underline{\underline{x_n = x^h_n + x^s_n = C\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{4}{3}}}$

$x_0 = 2 \Rightarrow C\left(-\frac{1}{2}\right)^0 + \frac{4}{3} = 2, \quad C + \frac{4}{3} = 2$

$C = \frac{6}{3} - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$

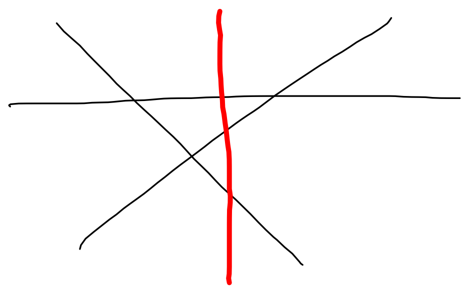
$$\underline{\underline{x_n = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{4}{3}}}$$

6.7

Vi har n linjer i planet slik at ingen er parallelle og det går aldri tre linjer gjennom samme pkt.

x_n: Antall områder de n linjene deler planet i.

$$x_{n+1} = x_n + (n+1), \quad x_0 = 1$$



homogen likn: $x^h_{n+1} = x^h_n$

$\Rightarrow x^h_n = C, \; C \in \mathbb{R}$.

Partikulær løsning:

$$x^s_n = An^2 + Bn$$

Setter inn i likn. $x^s_{n+1} = x^s_n + (n+1)$

$$\underbrace{A(n+1)^2 + B(n+1)}_{x^s_{n+1}} = \underbrace{An^2 + Bn}_{x^s_n} + (n+1) \qquad n \geq 0$$

$$A(\cancel{n^2} + 2n + 1) + \cancel{Bn} + B = \cancel{An^2} + \cancel{Bn} + n + 1$$

$$2An + A + B = n + 1 \qquad n \geq 0$$

$$\begin{cases} 2A = 1 & \Rightarrow A = \frac{1}{2} \\ A + B = 1 & \Rightarrow B = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$x^s_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

Generell løsning: $x_n = x^h_n + x^s_n = C + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$

Bestemmer C. $x_0 = 1$ $\quad 1 = C + \frac{1}{2}\cdot 0^2 + \frac{1}{2}\cdot 0 \Rightarrow \underline{C = 1}$

$$x_n = 1 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

B 2.17

$x_{n+1} - 2x_n = n^2$, $x_0 = 0$

$x_1 = 2x_0 + 0^2 = 0$

$x_2 = 2x_1 + 1^2 = 1$

a) $\cancel{x_n = n}$

b) $\cancel{x_n = n^2}$

c) $x_n = 3(2^n - 1) - 2n - n^2$

d) $\cancel{x_n = 2^n - 1}$

e) $\cancel{x_n = 2^n - n^2 - 1}$

$c \Rightarrow$ $x_1 = 3(2^1 - 1) - 2 \cdot 1 - 1^2$

$= 3 - 3 = 0$

$x_2 = 3(2^2 - 1) - 2 \cdot 2 - 2^2$

$= 3 \cdot 3 - 8 = 9 - 8 = \underline{\underline{1}}$

B 2.19 Hvilken av de følgende differenslikningene er lineær og har konstante koeffisienter?

(a) $x_{n+1} + n x_n = 1$

ikke konstant

(b) $x_{n+2} - \frac{5}{11} x_{n+1} + x_n = \sin(2n)$ ✓

(d) $x_{n+2} - \log(x_{n+1}) + x_n = 2$

ikke lineær

(c) $x_{n+2} - \frac{5}{11} x_{n+1} + x_n^2 = 0$

ikke lineær.

(e). $x_{n+1} = A x_n (1 - x_n)$

ikke lineær.