Plenum uke 38.

Oppgaver: A5: 2, A6: 3, 5, 7
B2: 17, 19, 21, 29

5.2 Avgjør om følgene konvergerer eller divergerer. Finn eventuelt grensen.

a) $\left\{\frac{1}{n+1}\right\}_{n=0}^{\infty}$ $\quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

Siden vi kan få leddene vilkårlig nær 0 ved å velge n stor konvergerer følgen mot 0. D.v.s

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

b) $\{2n-3\}_{n=2}^{\infty}$

n	2	3	4	5
$2n-3$	1	3	5	7

Gitt et vilkårlig stort tall K kan vi få følgen større enn K ved å velge n stor nok. Altså er følgen divergent.

c) $\{2n+1\}_{n=0}^{\infty}$, $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$

Dette er samme følgen som i b.

d) $\{2n\}_{n=0}^{\infty}$ $0, 2, 4, 6, 8, \ldots$

Følgen divergerer.

e) $\left\{\frac{1}{n^2+n+2}\right\}_{n=0}^{\infty}$, $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{14}, \ldots$

Leddene i følgen blir vilkårlig nærme 0. Altså konvergerer følgen mot 0.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+n+2} = 0.$$

f) $\{1000\}_{n=0}^{\infty}$, $1000, 1000, 1000, \ldots$

Følgen er konstant 1000, og har dermed grensen 1000.

$$\lim_{n\to\infty} 1000 = 1000.$$

g) $\left\{\frac{(-1)^n}{2n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ $\quad -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{10}, \ldots$

Leddane blir vilkårlig nære 0.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{2n} = 0.$$

h) $\left\{(-1)^n\right\}_{n=0}^{\infty}$ $\quad 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$

Følgen alternerer mellom -1 og 1 og er derfor divergent.

i) $\left\{(0.5)^n\right\}_{n=0}^{\infty}$ $\quad 1, 0.5, 0.25, 0.125, \ldots$

Talla blir vilkårlig nære 0, og følgen konvergerer dermed mot 0.

$$\lim_{n\to\infty} (0.5)^n = 0.$$

$$\|T_2\|_{L^\infty} \leq 4 \frac{\varepsilon}{\eta} \sum_{i=1}^{d} \|f^i\|_{Lip} \|\partial_i J_r\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$$

$$\leq 8 \frac{\varepsilon}{\eta r} \left(\sum_{i=1}^{d} \|f^i\|_{Lip} \right)$$

$$\boxed{\Pi_T^{r_0} = (r_0, T - r_0) \times \mathbb{R}^d}$$

6.3 Rente per år: 6.2 %
Innskudd: 10000.

a) Finn en formel for hvor mye penger du vil ha på konto om n år.

x_n: Penger på konto etter n år.

$$x_{n+1} = x_n + \frac{6.2}{100} x_n$$

Neste år

"Penger på konto i år"

Renter

Dette gir oss en første ordens homogen differenslikning.

$$x_{n+1} = 1.062\, x_n, \quad x_0 = 10000.$$

Teorem 6.5 gir oss den generelle løsningen

$$x_n = C(1.062)^n.$$

$x_0 = 10000 \Rightarrow C = 10000.$

$$\underline{\underline{x_n = 10000(1.062)^n.}} \quad n \geq 0.$$

b) Når vil du ha 20000 kroner på kontoen?
(Legg merke til at x_n er definert også for ikke heltalls verdier av n)

$$x_n = 20000 \iff$$
$$10000(1.062)^n = 20000$$
$$(1.062)^n = 2$$

Bruker logaritmer:

$$\ln(1.062)^n = \ln 2$$

$$n = \frac{\ln 2}{\ln(1.062)} \simeq 11.52.$$

Du vil ha 20000 på konto etter ca. omtrent elleve og et halvt år.

$\iff \quad 2^{1/7} = 1 + \frac{p}{100}$

$\iff \quad p = 100\left(2^{1/7} - 1\right)$

(sammenlikner med forrit:
$e^{\ln 2/7} = \left(e^{\ln 2}\right)^{1/7} = 2^{1/7}$)

Dette gir $p \simeq 10.41$

Bank B

e) En annen bank tilbyr deg 0.5 % rente per måned. Bør du bytte bank?

y_n: Penger på konto etter n måneder i Bank B.

Regner ut hvor mye penger du vil ha etter et år i bank B. Dvs. vi må finne y_{12}.

$$y_{n+1} = \left(1 + \frac{0.5}{100}\right) y_n, \quad y_0 = 10000.$$

$$\Rightarrow \quad y_n = 10000\,(1.005)^n$$

$y_{12} \simeq 10617.$

c) Sjekk at tiden det tar for at pengeinnskudd i doble seg er uavhengig av størrelsen.

Generelt har vi $x_n = x_0 (1.062)^n$.

$$x_n = 2x_0 \iff 2x_0 = x_0 (1.062)^n$$

$$\iff \boxed{2 = (1.062)^n}$$

uavhengig av x_0!

d) Hvor høy må den prosentvise renten være per år for at innskuddet dobler seg på syv år.

$$x_{n+1} = x_n + \frac{p}{100} x_n \qquad p\text{: rentesatsen}$$

$$\Rightarrow \quad x_n = x_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

$$x_7 = 2x_0 \Rightarrow 2x_0 = x_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^7$$

$$\iff 2 = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^7$$

Stølen $x_1 = 10000(1.062)^1$

$= 10620$

tjener du sirka 3 kroner på ikke å bytte bank.

6.5 Finn en løsning til den gitte differenslikningen med initialbetingelse

a) $x_{n+1} - 2x_n = 2$, $x_0 = 4$.

Generelle løsning:

homogen liken: $x_{n+1} - 2x_n = 0$

$\Rightarrow x_n^h = C2^n$

partikulær løsning: Anta $x_n^s = A$.

$x_{n+1}^s - 2x_n^s = 2 \overset{\text{"sette"}}{\Rightarrow} A - 2A = 2$

$-A = 2 \Leftrightarrow \underline{A = -2}$, $x_n^s = -2$

$x_n = x_n^h + x_n^s = C2^n - 2$.

Den generelle løsningen er $C2^n - 2$.

$x_0 = 4 \Rightarrow C - 2 = 4$, $\underline{C = 6}$

Altså har vi løsningen

$\underline{x_n = 6 \cdot 2^n - 2}$

b) $x_{n+1} - x_n = -1 \quad x_0 = 0$

"Hva bør løsningen bli?"

Generell løsning:

homogen likn: $x_{n+1} - x_n = 0$

Denne gir $x_n^h = C\,1^n = C$.

Partikulær løsning:

Siden enhver konstant er en løsning av den homogene likningen må vi øke graden på partikulær løsningen. (Justering av metode 6.21)

Antar $x_n^s = An$ og setter inn.

$$x_{n+1}^s - x_n^s = -1 \Rightarrow A(n+1) - An = -1$$

$$\Leftrightarrow A = -1 \Rightarrow x_n^s = -n.$$

Den generelle løsningen er

$$x_n = x_n^h + x_n^s = C - n.$$

Initial bet:

$$x_0 = 0 \Rightarrow 0 = C - 0 \Leftrightarrow C = 0.$$

$\underline{x_n = -n}$

c) $x_{n+1} + \frac{1}{2}x_n = 2$, $x_0 = 2$.

Homogen liken: $x_{n+1} + \frac{1}{2}x_n = 0$

$\Rightarrow x_n^h = C\left(-\frac{1}{2}\right)^n$, $n \geq 0$.

Partikulær løsning: Anta $x_n^s = A$.

$x_{n+1}^s + \frac{1}{2}x_n^s = 2 \Rightarrow A + \frac{1}{2}A = 2$

$\frac{3}{2}A = 2 \Leftrightarrow \underline{A = \frac{4}{3}}$

$x_n^s = \frac{4}{3}$.

Den generelle løsningen blir:

$$x_n = x_n^h + x_n^s = C\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{4}{3}$$

Bestemmer C:

$x_0 = 2 \Rightarrow C + \frac{4}{3} = 2$

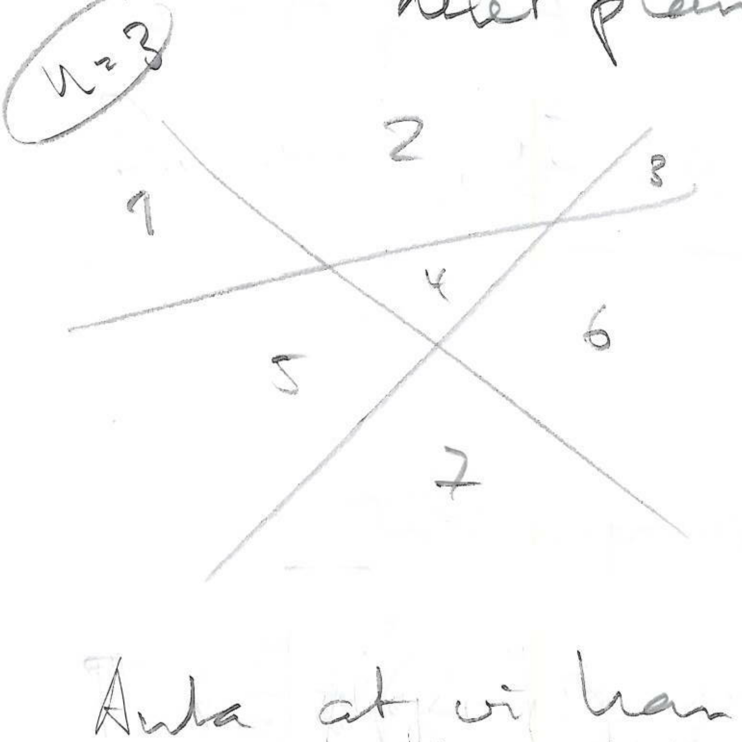
$C = 2 - \frac{4}{3} = \frac{6-4}{3} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$

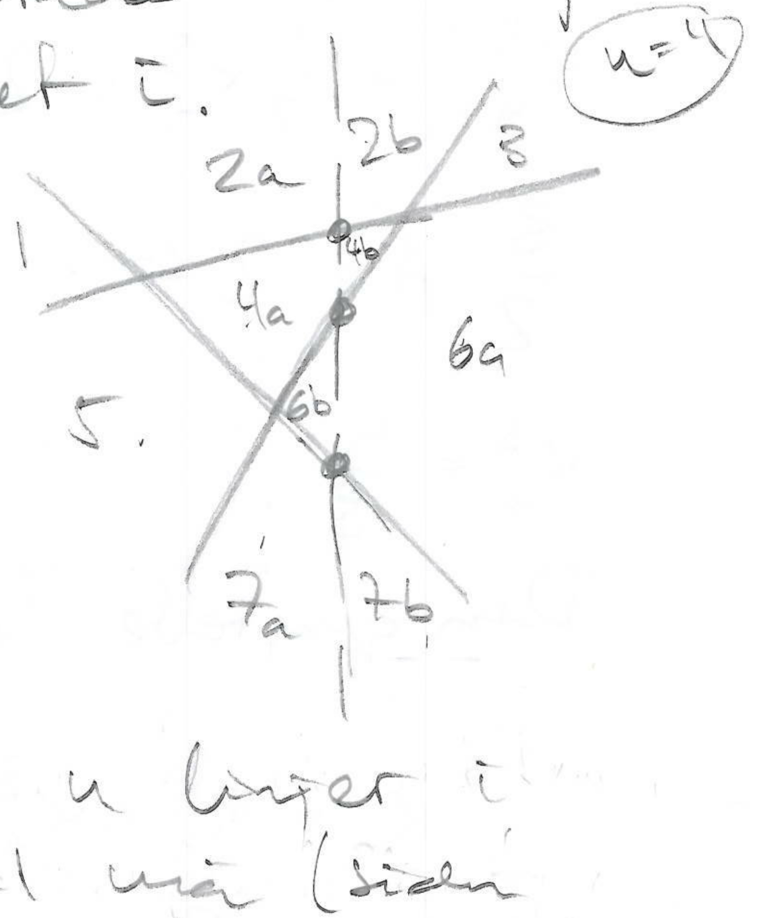
Dermed får vi

$$x_n = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{4}{3}.$$

6.7 Vi har n linjer i planet slik at ingen er parallelle og det går aldri tre linjer gjennom samme punkt.

x_n: Antall områder de n linjene deler planet i.





Anta at vi har n linjer i planet. Linje $n+1$ må (siden den ikke kan være parallell med noen av de andre) skjære alle de n linjene i n forskjellige punkter (ikke 3 linjer i samme pkt)

Dette deler linje $n+1$ i $n+1$ intervaller. Hvert intervall deler en region i 2 og gir dermed $(n+1)$ nye regioner. Dette gir

$$x_{n+1} = x_n + (n+1). \quad x_0 = 1.$$

Finn en formel for x_n.

Homogen likning: $x_{n+1} - x_n = 0$

$$x_n^h = C\,1^n = C.$$

Partikulær løsning: (Må øke grad)

$$x_n^s = An^2 + Bn$$

Setter inn i liken for å bestemme A og B.

$$x_{n+1}^s = x_n^s + (n+1) \Rightarrow$$

$$A(n+1)^2 + B(n+1) = An^2 + Bn + n + 1$$

$$An^2 + 2An + A + Bn + B = An^2 + Bn + n + 1$$

$$\cancel{An^2} + 2An + A + \cancel{Bn} + B = \cancel{An^2} + \cancel{Bn} + n + 1$$

$$2An + A + B = n + 1$$ (holder for alle n)

$$\begin{cases} 2A = 1 \\ A + B = 1 \end{cases}$$ (likningssystem 2 ukjente)

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = \frac{1}{2}.$$

$$x_n^s = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

Den generelle løsningen blir:

$$x_n = x_n^h + x_n^s = C + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

Bestemmer C (Finner spesielle løsning) (forvirrende navn!)

$$x_0 = 1 \implies 1 = C + \frac{1}{2}\cdot 0^2 + \frac{1}{2}\cdot 0$$

$$\iff \underline{C = 1.}$$

$$\underline{\underline{x_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1}}$$

B2.17

$$x_{n+1} - 2x_n = n^2, \quad x_0 = 0.$$

Homogen:

$$x^h_{n+1} - 2x^h_n = 0 \Rightarrow x^h_n = C \cdot 2^n$$

Partikulær løsning: Anta $x^s_n = An^2 + Bn + C$.
Setter inn for å bestemme A, B og C.

$$x^s_{n+1} - 2x^s_n = n^2 \Rightarrow$$

$$A(n+1)^2 + B(n+1) + C - 2(An^2 + Bn + C) = n^2$$

$$\underline{An^2} + 2An + A + Bn + B + C \underline{- 2An^2} - 2Bn - 2C = \underline{n^2}$$

Siden det må holde for alle n får vi

n^2: $A - 2A = 1$

n: $2A + B - 2B = 0$

konst: $A + B + C - 2C = 0$

$$\begin{cases} -A = 1 \\ 2A - B = 0 \\ A + B - C = 0 \end{cases}$$

$\underline{A = -1}$

$\underline{B = 2A = -2}$

$\underline{C = A + B = -1 - 2 = -3}$

$$x_n^s = -n^2 - 2n - 3.$$

"Hvordan kan vi sjekke om vi har regnet riktig?"

Setter inn:

$$x^s_{n+1} - 2x^s_n = n^2 \Rightarrow$$

$$-(n+1)^2 - 2(n+1) - 3 - 2(-n^2 - 2n - 3)$$

$$= -\cancel{n^2} - \cancel{2n} - 1 - \cancel{2n} - 2 - 3$$

$$+ \cancel{2n^2} + \cancel{4n} + 6$$

$$= 2n^2 - n^2 + 4n - 2n - 2n + 6 - 1 - 2 - 3$$

$$= \underline{\underline{n^2}} \quad \checkmark \quad \text{Riktig!}$$

Den generelle løsningen har formen

$$x_n = x_n^s + x_n^h = -n^2 - 2n - 3 + C2^n.$$

(Kan allerede nå se at det må være c som er riktig)

$x_0 = 0 \Rightarrow$

$$0 = -0^2 - 2\cdot 0 - 3 + C\cdot 2^0$$

$$\Rightarrow C - 3 = 0 \Rightarrow C = 3$$

$$x_n = 3\cdot 2^n - n^2 - 2n - 3$$

$$= \underline{\underline{3(2^n - 1) - 2n - n^2}}.$$

B2.19 Hvilken av de følgende differenslikningene er lineær og har konstant koeffisienter?

(a) $x_{n+1} + n x_n = 1$

ikke konstant.

(b) $x_{n+2} - \frac{5}{4} x_{n+1} + x_n = \sin(2n)$

Denne er lineær med konstante koeffisienter!

(c) $x_{n+2} - \frac{5}{11} x_{n+1} + x_n^2 = 0$

ikke lineær.

(d)

$x_{n+2} - \log(x_{n+1}) + x_n = 2$

ikke lineær.

(e) $x_{n+1} = A x_n (1 - x_n)$

ikke lineær.

B 2.21 $x_{n+1} - x_n = n$

Hvilke av de følgende er en partikulær løsning?

Vet at løsningen er på formen
$An^2 + Bn \Rightarrow$ (C) må være riktig.

B2.29

$$x_{n+1} + 2x_n = 3n \quad , n \geq 0$$

$$x_0 = 0$$

$$x_n = x_n^h + x_n^s$$

$$x_{n+1}^h + 2x_n^h = 0 \quad , \Rightarrow \underline{x_n^h = C(-2)^n}$$

Dette betyr at (c) må være riktig alternativ.

(c) $\quad x_n = \underbrace{\frac{(-2)^n}{3}}_{x_n^h} + \underbrace{n - \frac{1}{3}}_{x_n^s}$

Sjekker om $x_n^s = n - \frac{1}{3}$ er en partikulær løsning.

$$x_{n+1}^s + 2x_n^s = (n+1) - \frac{1}{3} + 2\left(n - \frac{1}{3}\right)$$

$$= n + 2n + 1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \underline{\underline{3n}} \checkmark$$

Riktig.