Plenum uke 40.

Samble gruppe avlyst.

Oppgaver: A8: 2, 5, 10, 12, 14
B2: 2, 7, 9, 11

8.2 Finn løsningen til differensligningen

$$x_{n+2} - \frac{1}{2}x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n \quad , n \geq 0$$

når $x_0 = 2$, $x_1 = \frac{1}{2}$.

Kar. liken: $r^2 - \frac{1}{2}r - \frac{1}{2} = 0$.

$$r = \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 4 \cdot 1 \cdot (-\frac{1}{2})}}{2} = \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2}}{2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}}}{2} = \frac{1}{4} \pm \frac{3}{4} \quad , \quad r \in \{1, -\tfrac{1}{2}\}.$$

Vi har to ulike reelle røtter (Tilfelle 1)

Generell løsning:

Teorem 8.15 $\Rightarrow$ $\underline{x_n = C + D\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$.

Må bestemme C og D.

$x_0 = 2 \Rightarrow C + D = 2$. : I

$x_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow C - \frac{1}{2}D = \frac{1}{2}$: II

Substitusjonsmetoden : I $\Rightarrow C = 2 - D$

II $\Rightarrow (2 - D) - \frac{1}{2}D = \frac{1}{2}$

$2 - \frac{3}{2}D = \frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}D = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$\underline{D = 1}$, I $\Rightarrow$ $\underline{C = 1}$.

$$\underline{\underline{x_n = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n}}.$$

b) Når $n \to \infty$ vil x_n stabilisere seg på en bestemt verdi. Finn denne.

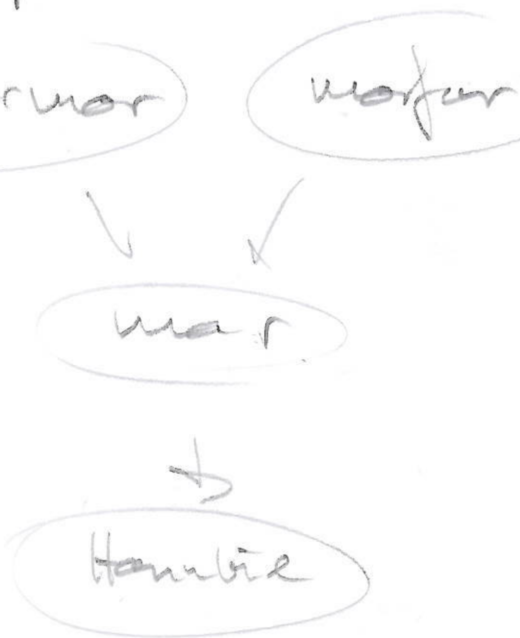
$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1 + \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \underline{\underline{1}}$$

"går mot null".

8.5

x_k: Antall forgjengere en hannbie har k generasjoner tilbake.

y_k: Antall forgjengere en hunnbie har k generasjoner tilbake.



$$\begin{cases} x_{k+1} = y_k \\ y_{k+1} = x_k + y_k \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_k = x_{k-1} + y_{k-1}$$

$$x_{k+1} = x_{k-1} + y_{k-1} = x_{k-1} + x_k$$

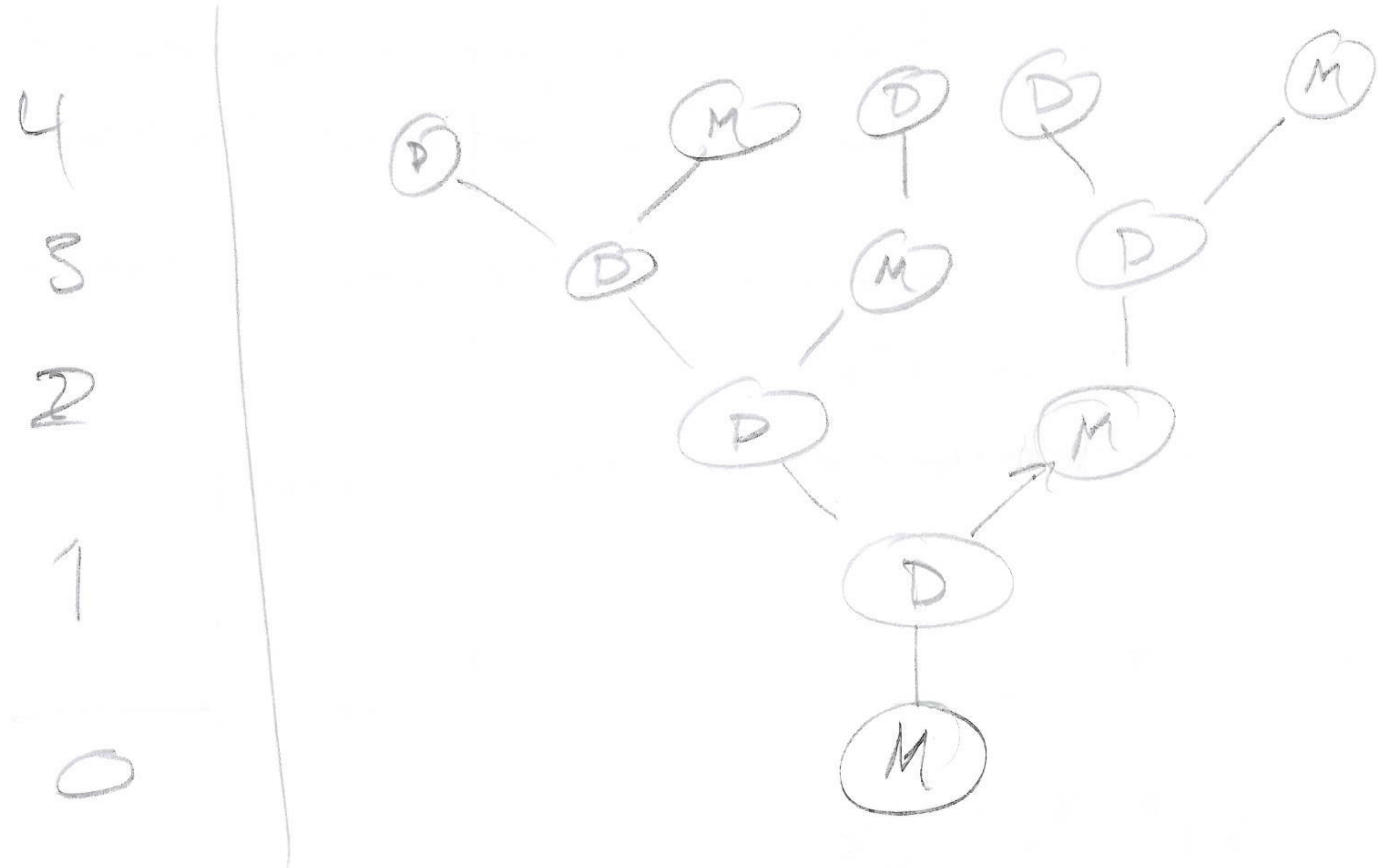
$$y_{k-1} = x_k$$

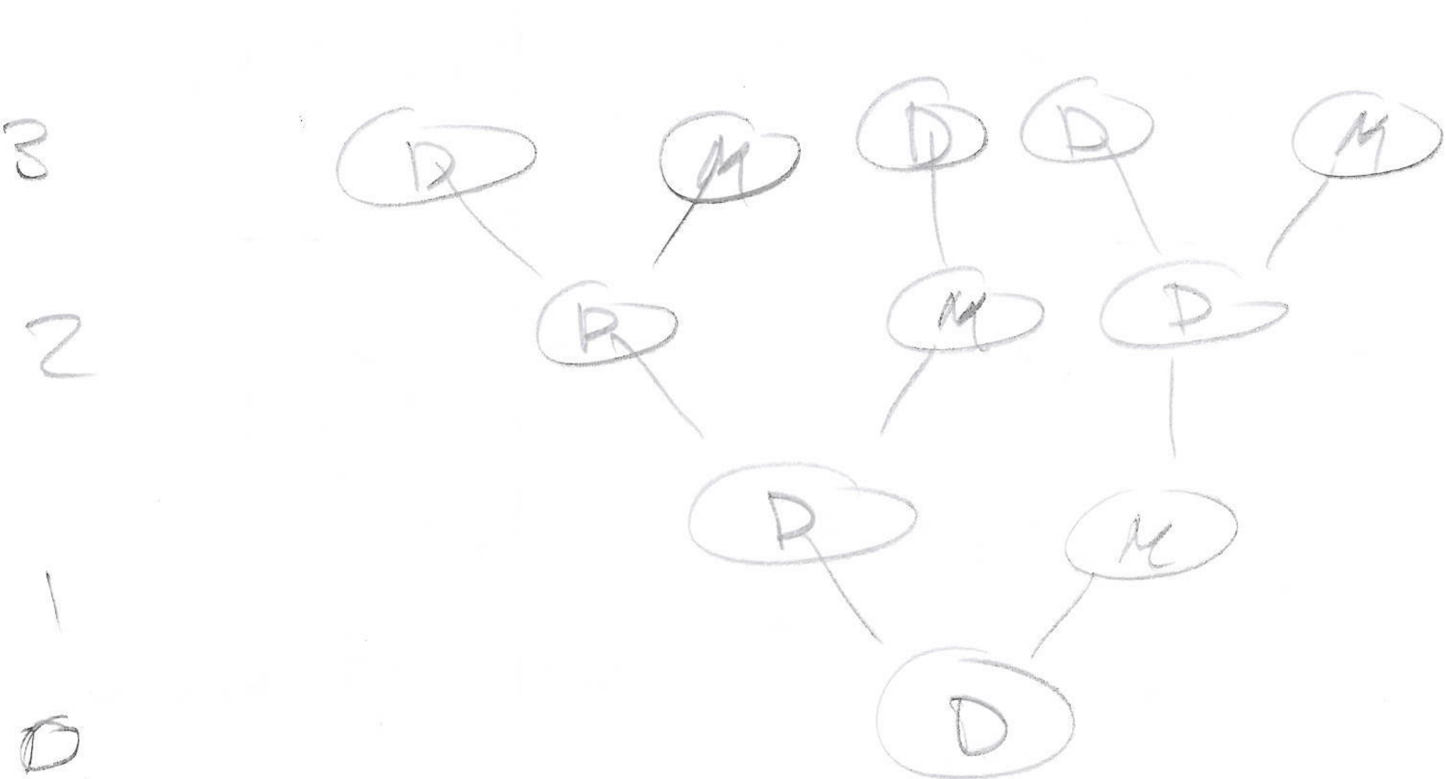
Altså har vi $\underline{x_{k+1} = x_k + x_{k-1}}$

$x_1 = 1$, $x_2 = 2$ $(x_0 = 1)$

antall foreldre   antall besteforeldre.

Dette er Fibonacci følgen s. 175


4 D M D D M
3 D M D
2 D M
1 D
0 M


3 D M D D M
2 D M D
1 D M
0 D

8.10

a) Løs andregradslikningen

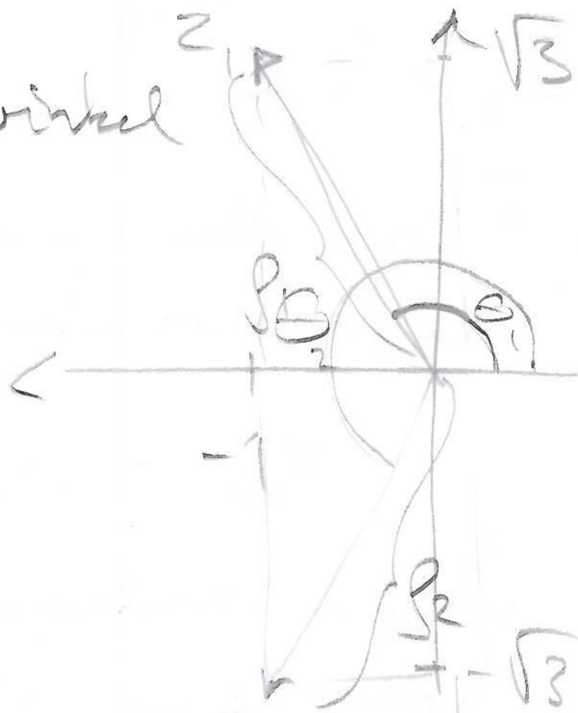
$$z^2+2z+4=0$$

og skriv løsningene på eksponentialform.

$$z = \frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 1\cdot 4}}{2} = -1\pm\sqrt{3}\,i$$

$$z_1 = -1+\sqrt{3}\,i, \quad z_2 = -1-\sqrt{3}\,i.$$

Vi må bestemme vinkel og modulus.

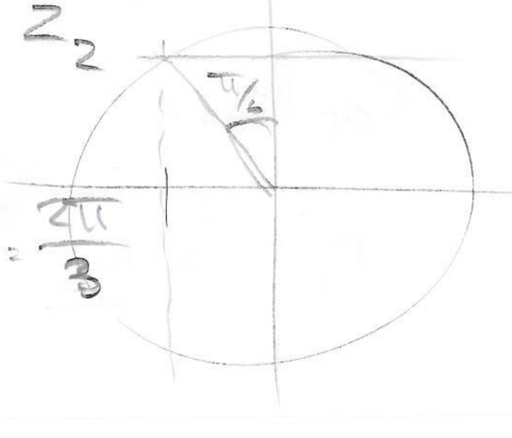


Pythagoras: $\rho_1^2 = 1^2+(\sqrt{3})^2$

$$\rho_1 = \sqrt{1+3} = \underline{\underline{2}}$$

$$z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\cos\theta_1 = -\frac{1}{2}\\ \sin\theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{3}$$



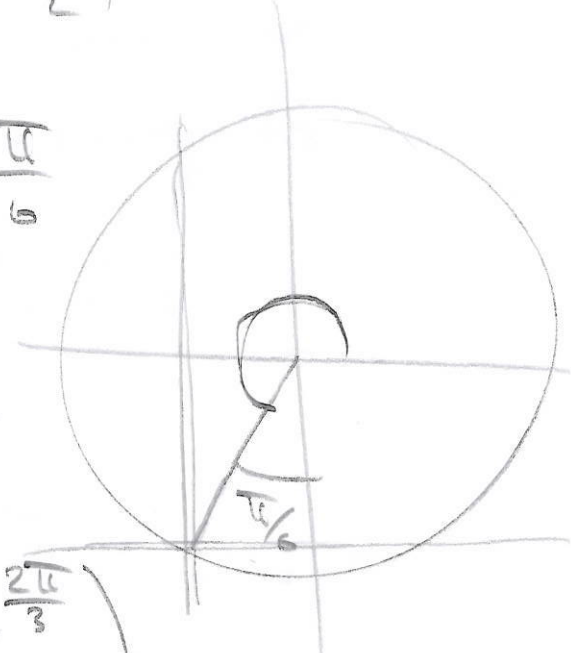
Vi kan nå skrive z_1 på eksponentialform.

$$z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1} = \underline{\underline{2e^{i\frac{2\pi}{3}}}}$$

$$z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$\rho_2 = \rho_1 = 2.$

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta_2 &= -\frac{1}{2} \\ \sin\theta_2 &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta_2 = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \underline{\frac{4\pi}{3}}$$



$$z_2 = 2e^{i\frac{4\pi}{3}} \quad \left(= 2e^{-i\frac{2\pi}{3}} \right)$$

b) Finn den generelle løsningen til differenslikningen

$$x_{n+2} + 2x_{n+1} + 4x_n = 0$$

Skriv løsningen uten bruk av komplekse tall.

Kar.likn: $r^2 + 2r + 4 = 0$ (som i a!)

$r_1 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$, $r_2 = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

Teorem 8.15 (s. 181), tilfelle 3
gir generell løsning:

$$\underline{\underline{x_n = C\,2^n \cos\left(n\frac{2\pi}{3}\right) + D\,2^n \sin\left(n\frac{2\pi}{3}\right)}}$$

for $C, D \in \mathbb{R}$.

c) Finn den generelle løsningen til

$$x_{n+2} + 2x_{n+1} + 4x_n = 21n.$$

Husk $x_n = x_n^h + x_n^s$. Vi må finne en partikulær løsning x_n^s.

Metode 8.22 gir oss at vi burde gjette $x_n^s = An + B$.

$$x_{n+2}^s = A(n+2) + B = An + 2A + B$$

$$x_{n+1}^s = A(n+1) + B = An + A + B$$

Setter inn i likning:

$$x_{n+2}^s + 2x_{n+1}^s + 4x_n^s = 21n$$

$$An + 2A + B + 2(An + A + B) + 4(An + B) = 21n$$

$$7An + 4A + 7B = 21n \quad (\forall n \geq 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 7A = 21 \Rightarrow \underline{\underline{A = 3}} \\ 4A + 7B = 0 \Rightarrow 7B = -4A \\ \qquad\qquad\qquad\quad \underline{\underline{B = -\frac{12}{7}}} \end{cases}$$

Dermed får vi $\underline{x_n^s = 3n - \frac{12}{7}}$

Den generelle løsningen blir dermed

$$x_n = x_n^h + x_n^s =$$

$$\underline{\underline{C 2^n \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + D 2^n \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + 3n - \frac{12}{7}}}.$$

8.12 Vi har gitt en diff. likn.

$$x_{n+2} - x_n = 0$$

a) Vis at likningen ikke har noen løsning for $x_0 = 0$ og $x_2 = 1$.

For $n = 0$ har vi $x_2 - x_0 = 0$,

men da må $x_2 = x_0$.

b) Finn løsningen for $x_0 = 0, x_1 = 1$.

Finner generell løsning:

Kar likn: $r^2 - 1 = 0$

$r^2 - 1 = (r+1)(r-1) \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = -1$.

$$\underline{x_n = C + D(-1)^n}$$

Kan vi vise a fra generell løsning?

Finner spesiell løsning:

$$\left.\begin{aligned} x_0 = 0 &\Rightarrow C + D = 0 \\ x_1 = 1 &\Rightarrow C - D = 1 \end{aligned}\right\}$$

Addisjons metoden!

$2C = 1$, $2D = -1$, $C = \frac{1}{2}, D = -\frac{1}{2}$.

$$x_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(-1)^n .$$

8.14 (Se eksempel 8.18)

x_n: Sannsynligheten for at Mia vinner når hun har n kroner.

Vi må uttrykke x_n ved x_{n+1}, x_{n-1}.

I en gitt runde må hun enten vinne en krone eller tape en krone. Sannsynligheten for å vinne (hele spillet) må dermed være gitt ved summen av sannsynligheten for:

(i) Hun vinner runden og spillet.

(ii) Hun taper runden og vinner spillet.

$$x_n = \underbrace{\frac{3}{5} x_{n+1}}_{(i)} + \underbrace{\frac{2}{5} x_{n-1}}_{(ii)}$$

Alternativ mer formell utledning:

A: Mia vinner (hele spillet) Vanskelig!

a_k: Mia sine poeng i k-te runde.

"Mia vinner i snitt 3 av 5 runder"

$$\Rightarrow P(a_{k+1} = n+1 \mid a_k = n) = \frac{3}{5}$$

$$P(a_{k+1} = n-1 \mid a_k = n) = \frac{2}{5}.$$

Fra loven om total sannsynlighet følger at

$$P(A \mid a_k = n) = P(A \mid a_{k+1} = n+1) P(a_{k+1} = n+1 \mid a_k = n)$$

$$(*) \qquad + P(A \mid a_{k+1} = n-1) P(a_{k+1} = n-1 \mid a_k = n)$$

Siden $P(A \mid a_k = n)$ er uavhengig av k lar vi $x_n = P(A \mid a_k = n)$

(Dette er samme definisjon som før.)

Altså følger fra $(*)$

$$x_n = \frac{3}{5} x_{n+1} + \frac{2}{5} x_{n-1}.$$

Finner generell løsning.
Skriver differenslikningen på normal form. (substituer $k+1 = n$)

$$\frac{3}{5} x_{n+2} - x_{n+1} + \frac{2}{5} x_n = 0$$

Kar liken: $\frac{3}{5} r^2 - r + \frac{2}{5} = 0$

$$r = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5}}}{2 \cdot \frac{3}{5}} = \frac{1 \pm \sqrt{\frac{1}{25}}}{\frac{6}{5}}$$

$$= \frac{5 \pm 1}{6} \quad r_1 = 1, \; r_2 = \frac{2}{3}.$$

$$x_n = C + D\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Initialbetingelser: Dersom Mia har 0 kr taper hun garantert. Sjansen for å vinne er 0. $x_0 = 0$.
Dersom hun har 20 kr er sjansen for å vinne 1. $x_{20} = 1$.

B2.2

a) Finn løsningene til

$$z^2 - 6z + 12 = 0$$

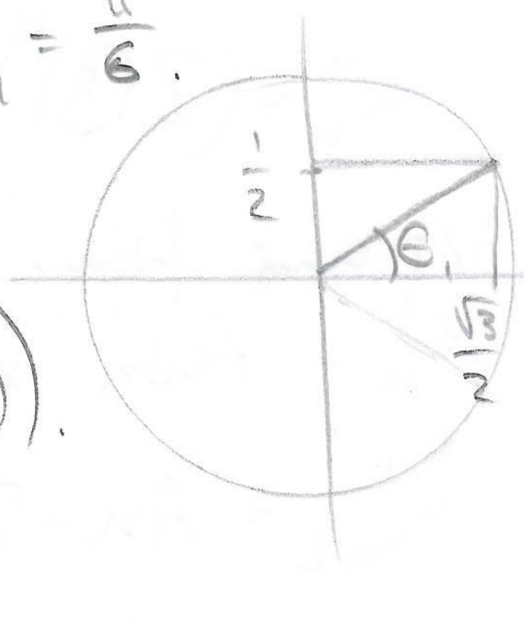
og skriv dem på polarform.

$$z = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2} = 3 \pm \sqrt{9-12}$$
$$= 3 \pm \sqrt{3}\, i$$

$z_1 = 3 + \sqrt{3}\, i$, $z_2 = 3 - \sqrt{3}\, i$, $(z_2 = \bar{z}_1)$.

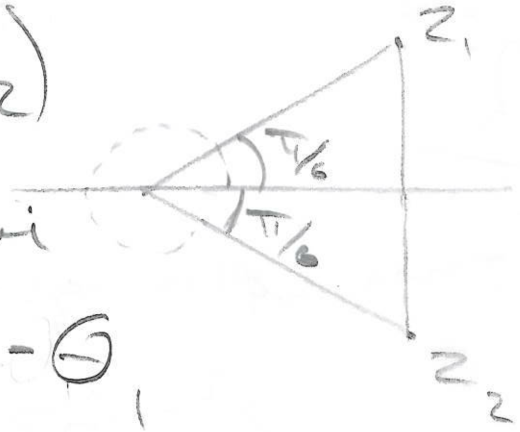
$z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, $\rho_1 = \sqrt{3^2 + 3}$
$= \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta_1 &= \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_1 &= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{6}.$$



$$z_1 = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right).$$

$z_2 = \rho_2 (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$



Siden $z_2 = \bar{z}_1$, har vi

$\rho_2 = \rho_1 = 2\sqrt{3}$. $\theta_2 = -\theta_1$

Om vi vil ha $\theta_2 \in [0, 2\pi]$ kan vi legge til 2π. $\theta_2 = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11}{6}\pi$.

$$z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{11}{6}\pi\right) + i\sin\left(\frac{11}{6}\pi\right)\right).$$

b) Finn en løsning av differenslikn.

$$x_{n+2} - 6x_{n+1} + 12x_n = 49n$$

s.a. $x_0 = 4$, $x_1 = 12$.

Fra (a) og teorem 8.15 følger at

$$x_n^h = (2\sqrt{3})^n \left(C\cos\left(n\frac{\pi}{6}\right) + D\sin\left(n\frac{\pi}{6}\right)\right).$$

Vi må finne en partikulær løsning x_n^s. Anta $x_n^s = An + B$.

$$x_{n+2}^s = An + 2A + B, \quad x_{n+1}^s = An + A + B.$$

Setter inn i likn:

$$(An+2A+B)-6(An+A+B)$$
$$+12(An+B)=49n.$$

$$7An-4A+7B=49n \quad (n\geq 0)$$

$$\begin{cases} 7A=49 & \Rightarrow A=7 \\ -4A+7B=0 & \Rightarrow 7B=4A \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$\underline{B=4}$$

Altså får vi $x_n^s = 7n+4$.

Generelle løsning er gitt ved:

$$x_n = x_n^h + x_n^s$$
$$= (2\sqrt{3})^n\left(C\cos\left(n\frac{\pi}{6}\right)+D\sin\left(n\frac{\pi}{6}\right)\right)$$
$$+7n+4.$$

Setter inn initialbetingelser:

$$x_0=4 \Rightarrow C+4=4 \Rightarrow C=0.$$

$x_1 = 12$

$$(2\sqrt{3})\Big(\underset{\substack{\shortparallel \\ 0 \text{ fra } x_0=4.}}{C}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + D\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}_{1/2}\Big) + 7\cdot 1 + 4 = 12$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sqrt{3}\cdot D\cdot\frac{1}{2} + 11 = 12$$

$$\sqrt{3}\,D = 1 \Leftrightarrow D = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$x_n = (2\sqrt{3})^n\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(n\frac{\pi}{6}\right)\right) + 7n + 4$$

B.2.7

a) Finn den generelle løsningen til differenslikningen

$$x_{n+2} - x_{n+1} + x_n = 0$$

og skriv den både på kompleks og reell form.

Kar. likn: $r^2 - r + 1 = 0$.

$$r = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\cdot 1\cdot 1}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

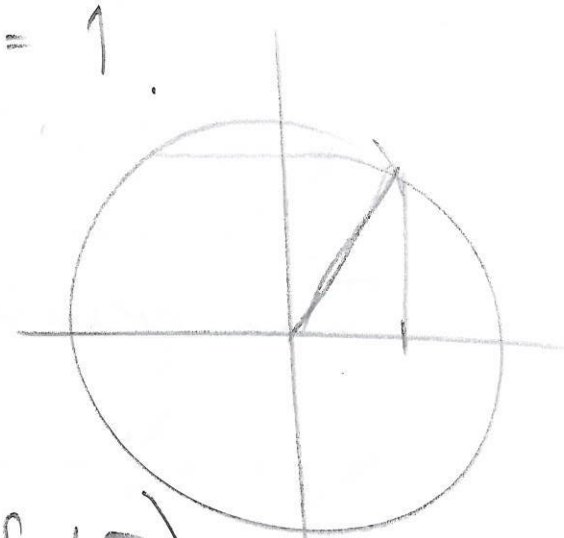
Den generelle løsningen (på komplekse form) er dermed

$$x_n = E\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)^n + \overline{E}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)^n.$$

For å skrive på reell må vi finne ρ, θ hvor $r_1 = \rho e^{i\theta}$. $\left(r_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)$.

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1.$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{1}{2} \\ \sin\theta &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right\} \theta = \frac{\pi}{3}$$



Dermed følger (teorem 8.15)

$$\underline{\underline{x_n = C\cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) + D\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right)}}$$

b) Finn løsningen av

$$x_{n+2} - x_{n+1} + x_n = 2n+1,$$

s.a. $x_0 = 1$ og $x_1 = 0$.

Vi har allerede funnet x_n^h.

La oss finne x_n^s. Anta $x_n^s = An + B$.

$$\cancel{A(n+2)} + \cancel{B} - \left(A(\cancel{n}+1) + \cancel{B}\right) + \cancel{An} + B = 2n+1$$

$$An + A + B = 2n+1 \qquad n \geq 0.$$

$$\begin{cases} A = 2 \\ A + B = 1, \quad B = 1 - A = -1 \end{cases}$$

$$\underline{x_n^s = 2n - 1}$$

Den generelle løsningen blir da

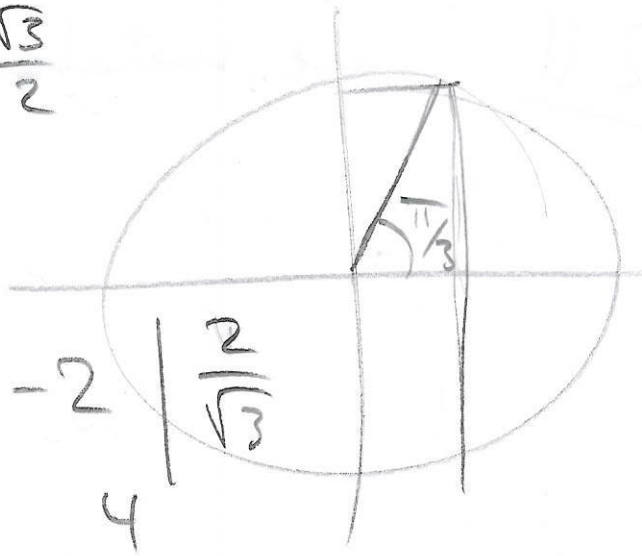
$$x_n = x_n^h + x_n^s$$

$$= C\cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) + D\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right) + 2n - 1$$

$$x_0 = 1 \Rightarrow C - 1 = 1 \Rightarrow \underline{\underline{C = 2}}$$

$$x_1 = 0 \Rightarrow$$

$$C \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}_{\frac{1}{2}} + D \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}_{\frac{\sqrt{3}}{2}} + 2 - 1 = 0$$



$$\frac{1}{2} C + \frac{\sqrt{3}}{2} D = -1$$

$$C = 2 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} D = -2 \quad \Big| \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\underline{\underline{D = -\frac{4}{\sqrt{3}}}}$$

$$\underline{\underline{x_n = 2\cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) - \frac{4}{\sqrt{3}} \sin\left(n\frac{\pi}{3}\right) + 2n - 1}}$$

B.2.9 Hvilket av de følgende er en forenkling av uttrykket?

$$\frac{1+i}{1-i}$$

(a) 2 (b) 2+i (c) i

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i+i^2}{1-i^2}$$

$$= \frac{2i}{2} = \underline{\underline{i}} \quad \text{Svar: (C).}$$

<u>B.2.11</u> Se notatene fra 24/4.