A8: 20, A10: 3, 5, 9, 10.

B. 1. 11

8.20 Innskudd: a.
Rente: 5% (per år)

Uttak: 100000 første år
110000 andre år
⋮

a)

x_n: Beløpet som står på konto ~~ett~~ etter n-te uttaket.

$$x_{n+1} = \overbrace{\text{"Beløp fra i fjor"}}^{x_n} + \underbrace{\text{"Renter"}}_{0.05x_n} - \underbrace{\text{"Uttak"}}_{100000 + 10000n}$$

$$x_{n+1} = 1{,}05x_n - 100000 - 10000n.$$

Finner x_n. Først må vi finne den generelle løsningen. Husk

$$x_n = x_n^s + x_n^h.$$

$$x_{n+1}^h = 1.05\, x_n^h \implies x_n^h = C(1.05)^n$$

Anta $x_n^s = An + B$. Setter inn i likning: $\quad (x_{n+1}^s = An + A + B)$

$$x_{n+1}^s = 1.05\, x_n^s - 100000 - 10000n$$

$$\cancel{An} + A + B = 1.05(An + B) - 100000 - 10000n$$

$$-0.05An + A - 0.05B = -10000n - 100000.$$

Siden dette skal holde for alle $n \geq 0$

$$\begin{cases} -0.05A = -10000 & : \mathrm{I} \\ A - 0.05B = -100000 & : \mathrm{II} \end{cases}$$

$$\mathrm{I} \implies \frac{1}{20}A = 10000 \iff A = 200000.$$

b) Hvor stor må a være for at utbetalingene skal fortsette i det uendelige?

Dersom $a \geq 6\,000\,000$ følger at $x_{n+1} \geq x_n$ så følgen er voksende og blir dermed aldri null.

Anta $a < 6000000$. Siden

$$(a - 6000000)(1.05)^n$$

vokser eksponentielt følger at $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$. Altså må kontoen bli tom.

c) $x_{50} = 0. \Rightarrow$

$$0 = (a - 6\,000\,000)(1.05)^{50} + 200000 \cdot 50 + 6000000.$$

$$a = 6000000 - \frac{1}{(1.05)^{50}}\left(200000 \cdot 50 + 6000000\right)$$

$\Rightarrow \underline{a \simeq 4\,604\,740}.$

$$II \Rightarrow -\frac{1}{20}B = -100000 - A$$

$$= -300000$$

$$B = 6000000.$$

$$x_n^s = 200000n + 6000000$$

Generell løsning:

$$x_n = C(1.05)^n + 200000n + 6000000.$$

For å finne spesiell løsning bruker vi $x_0 = a$.

$$x_0 = C + 6000000$$

$$\Rightarrow C = a - 6000000.$$

$$\underline{\underline{x_n = (a - 6000000)(1.05)^n + 200000n + 6000000.}}$$

10.3 Finn grenseverdiene

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{7x^2 + 4x^4}{3x^3 - 2x^2}$ (Deler på x^3 oppe og nede)

$= \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{7x^{-1} + 4x}{3 - 2x^{-1}} = \infty.$

går mot ∞

går mot null

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{8x^2 + 2x + 7}{\sqrt{x} - 4x^2}$

$= \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{8 + 2x^{-1} + 7}{x^{-3/2} - 4} = -\dfrac{8}{4} = \underline{\underline{-2}}$

c) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^4 + \sqrt{x} + e^{x^2}}{7 + \sin(\sqrt{x})} = \infty.$

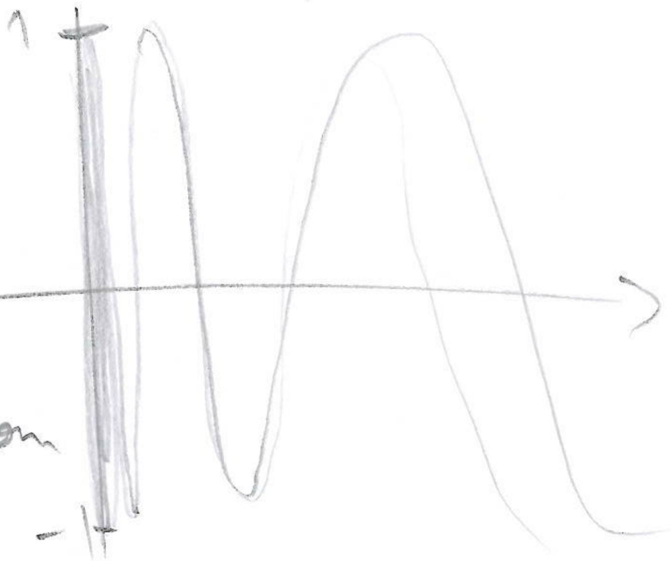
"vokser veldig raskt"

$\in [6, 8]$

d) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 4x^3}{8 + 7x^2} = -\infty.$

10.5 Eksisterer følgende grenseverdier?

a) $\lim_{x \to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

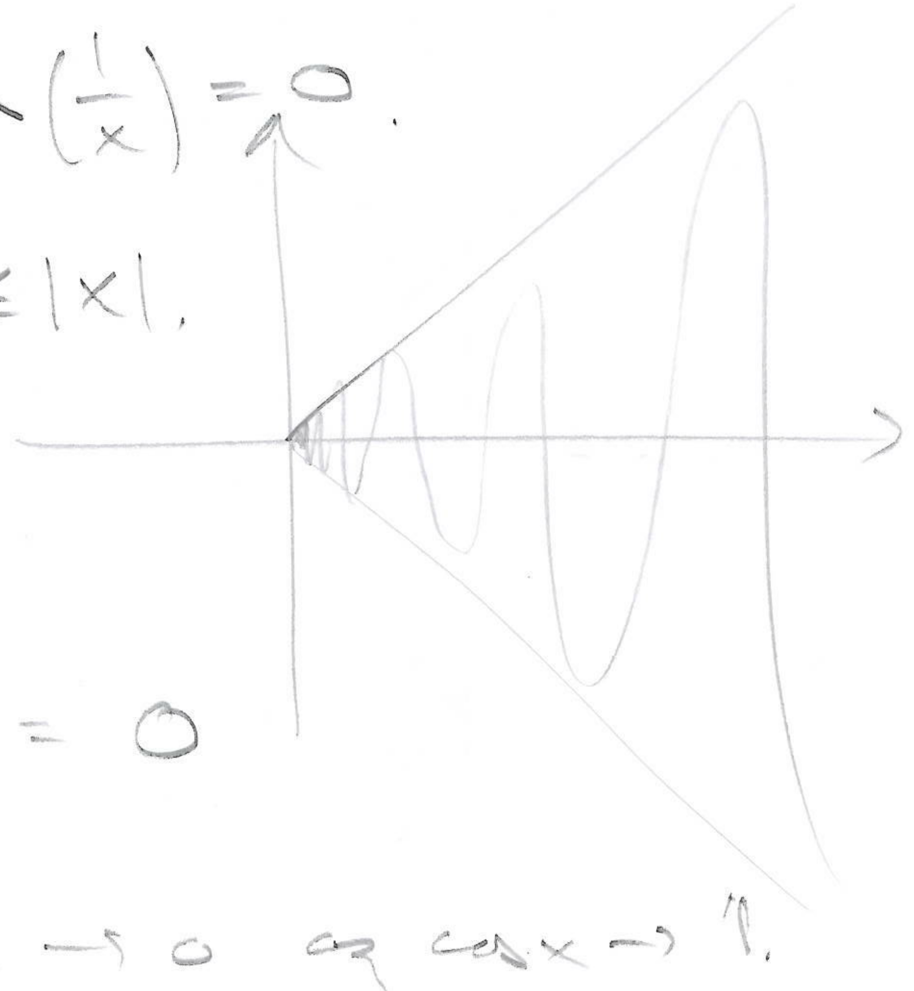


Funksjonen oscillerer fortere og fortere mellom -1 og 1 når $x \to 0$.
Dermed finnes ingen grense.

b) $\lim_{x \to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ (samme som over)

c) $\lim_{x \to 0} x \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

$\left| x \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x|$.



d) $\lim_{x \to 0} \tan x$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\cos x} = 0$

"Siden $\sin x \to 0$ og $\cos x \to 1$.

10.9 Finn middelverdi, amplitude, periode og akrofase. Skisser funksjonen.

a) $f(t) = -2 + 4\cos(\pi t - \pi)$

$$f(t) = A_0 + A\cos\left(\frac{2\pi}{T}(t - t_0)\right)$$

A_0: middelverdi

A: amplitude

T: periode

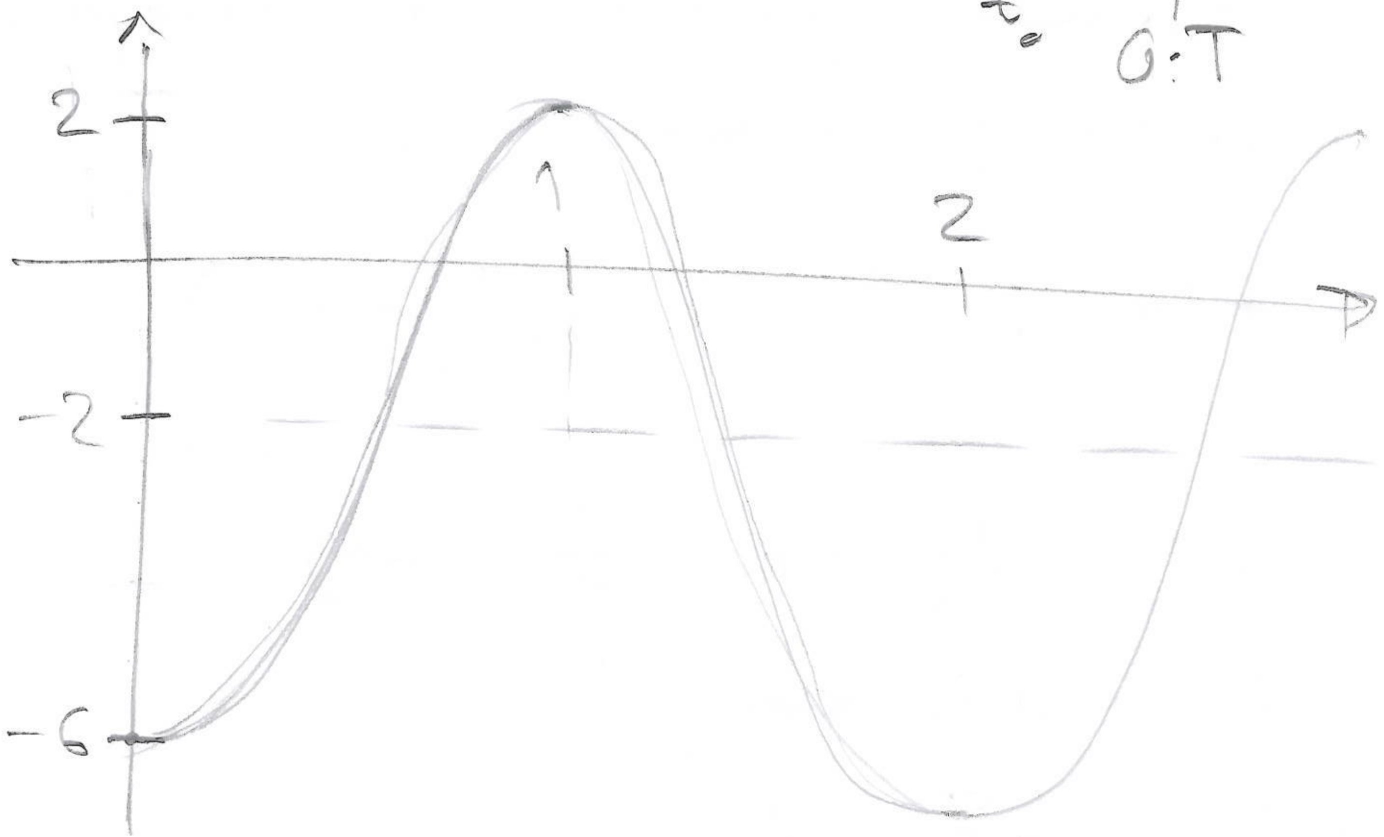
Funksjonen har en topp i t_0

Vi kan lese av: $A_0 = -2$, $A = 4$.

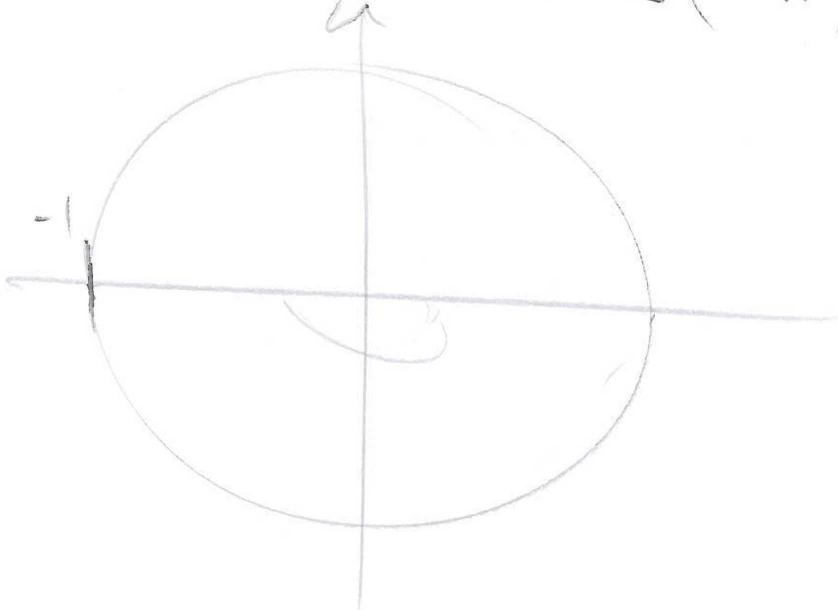
$$\pi t - \pi = \frac{2\pi}{2}(t - 1)$$

$T = 2$, $t_0 = +1$. For å finne akrofasen må vi legge til heltalls-multiplum av T s.a. vi havner i $[0, T)$.

Akrofasen er gitt ved $\underset{t_0}{1} + \underset{0.T}{0 \cdot 2} = \underline{\underline{1}}$.



$f(0) = -2 + 4\cos(-\pi) = -6$.

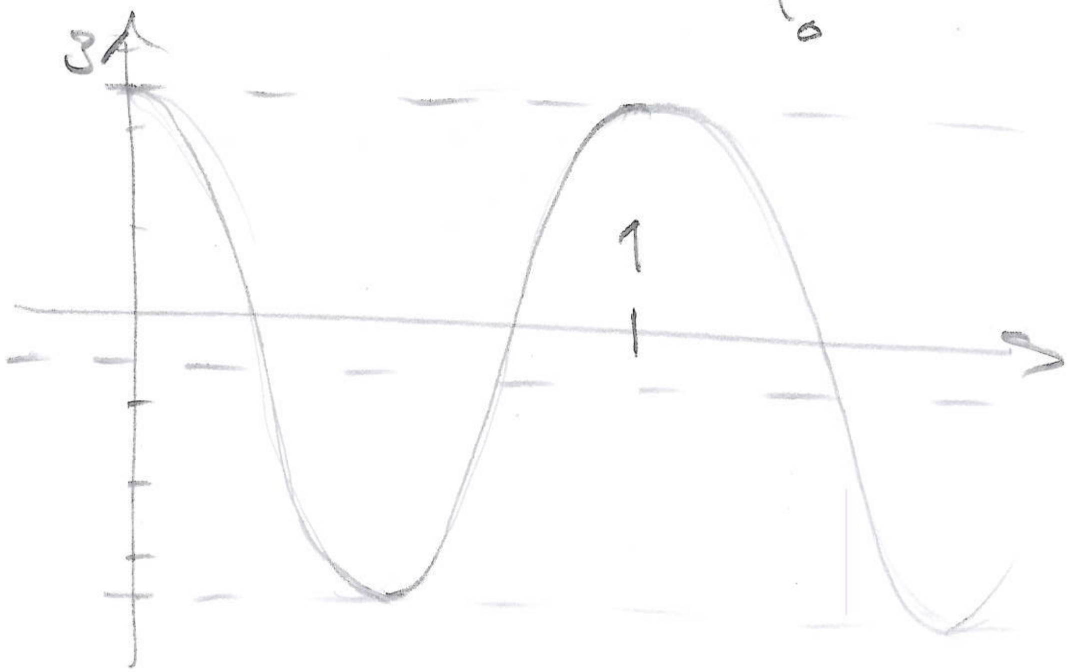


b) $f(t) = -\frac{1}{2} + 3\cos(\pi(2t-2))$

$$\pi(2t-2) = \frac{2\pi}{1}(t-1)$$

$A_0 = -\frac{1}{2}$, $A = 3$, $T = 1$, $t_0 = 1$

Akrofasen er dermed $\underset{t_0}{1} + (-1)\cdot \underset{T}{1} = 0$.



c) $f(t) = 7\cos\left(\frac{\pi}{7}t - 7\right)$

$$\frac{\pi}{7}t - 7 = \frac{2\pi}{14}\left(t - 7\cdot\frac{7}{\pi}\right)$$

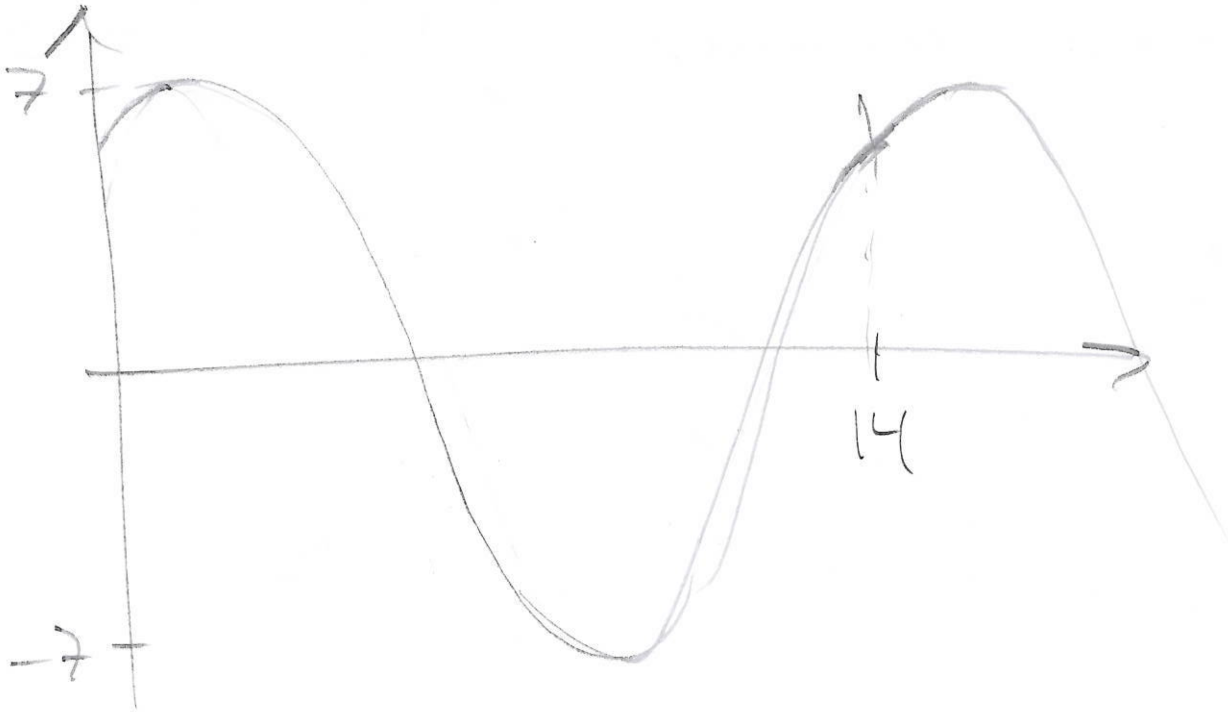
$A_0 = 0$, $A = 7$, $T = 14$, $t_0 = \frac{49}{\pi}$

Finner Akrofasen:

$\underbrace{\frac{49}{\pi} > 14}_{t_0 > T}$ så vi kan trekke fra $1 \cdot T$.

Akrofasen er dermed

$$\frac{49}{\pi} - 14 \approx 1.6$$



10.10 Skriv uttrykket på formen

$$A\cos(bx-\phi) \quad \text{(faseform)}$$

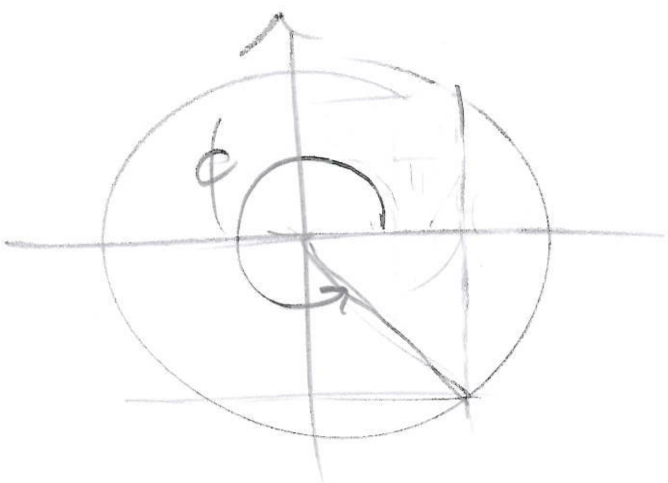
a) $\cos x - \sin x$

$$C\cos(bx) + D\sin(bx) = A\cos(bx-\phi)$$

$$A = \sqrt{C^2+D^2}, \quad \cos\phi = \frac{C}{A}, \quad \sin\phi = \frac{D}{A}.$$

$C = 1$, $D = -1$, $b = 1$. $\Rightarrow A = \sqrt{2}$.

$$\left.\begin{aligned} \cos\phi &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\phi &= -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{\phi = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}}$$



$\cos x - \sin x$

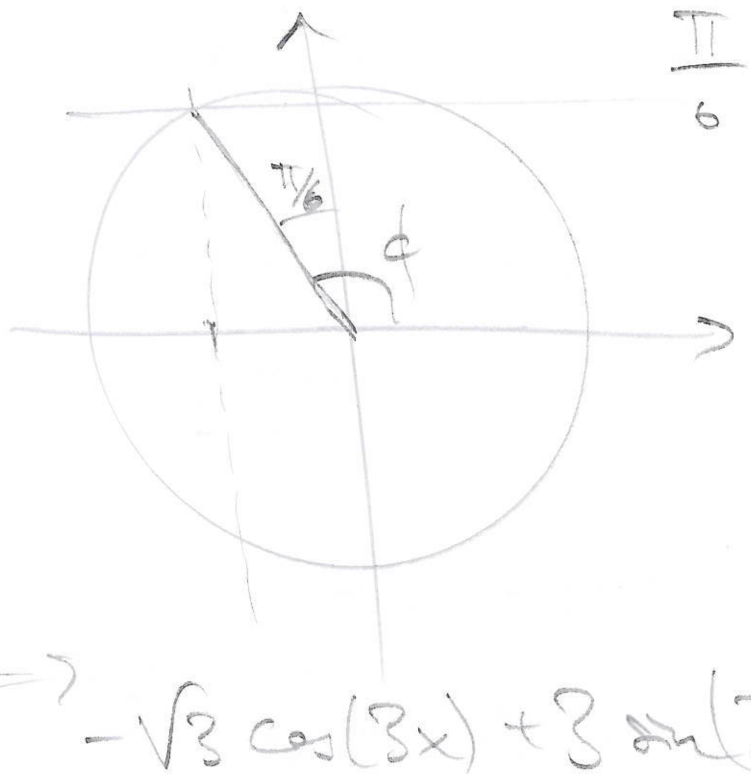
$$\underline{\underline{= \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{7\pi}{4}\right)}}$$

b) $-\sqrt{3}\cos(3x) + 3\sin(3x)$

$C = -\sqrt{3}$, $D = 3$, $b = 3$

$A = \sqrt{3+9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$$\left.\begin{aligned} \cos\phi &= -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{2} \\ \sin\phi &= \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \phi = \frac{2\pi}{3}$$



$\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$

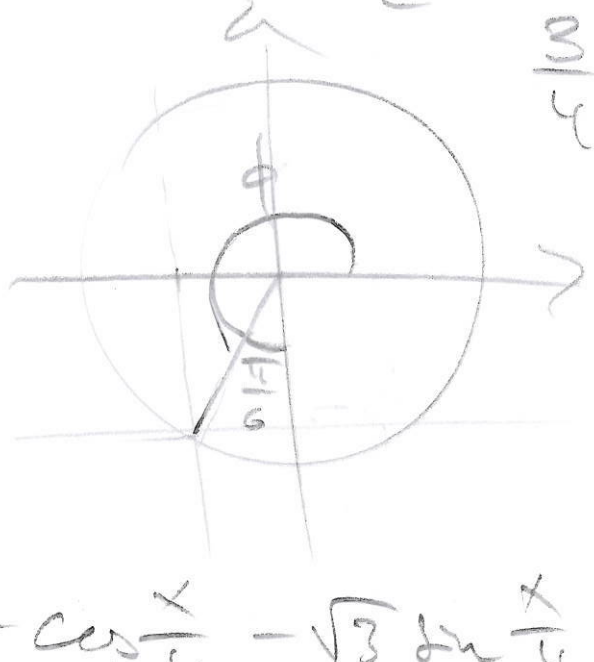
$$\Rightarrow -\sqrt{3}\cos(3x) + 3\sin(3x) = \underline{\underline{2\sqrt{3}\cos\left(3x - \frac{2\pi}{3}\right)}}$$

9) $-\cos\frac{x}{4} - \sqrt{3}\sin\frac{x}{4}$

$C = -1, \; B = -\sqrt{3}, \; b = \frac{1}{4}.$

$\Rightarrow A = \sqrt{1+3} = 2.$

$$\left.\begin{aligned} \cos\phi &= -\frac{1}{2} \\ \sin\phi &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \phi = \frac{4\pi}{3}$$



$$\frac{3}{4}2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{3}{2}\pi - \frac{\pi}{6}$$
$$= \frac{9\pi - \pi}{}$$
$$= \frac{8\pi}{6} = \frac{4\pi}{3}$$

$$-\cos\frac{x}{4} - \sqrt{3}\sin\frac{x}{4} = \underline{\underline{2\cos\left(\frac{x}{4} - \frac{4\pi}{3}\right)}}$$

B.1.11

a) For hvilke verdier av a vil likningssystemet

$$\begin{cases} 2x + a^2 y = a \\ x + 2y = 1 \end{cases}$$

ha én løsning? uendelig mange? ingen?

La oss bruke teorem 3.13. Koeffisient matrisen er gitt ved

$$\begin{bmatrix} 2 & a^2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} =: A.$$

$$\det(A) = 2 \cdot 2 - a^2 \cdot 1 = 4 - a^2$$
$$= (2-a)(2+a)$$

Systemet har én løsning for $a \in \{2, -2\}$.

La $a = 2$. Da har vi systemet

$$\begin{cases} 2x + 4y = 2 & : L_1 \\ x + 2y = 1 & : L_2 \end{cases}$$

Systemet har <u>uendelig mange</u> løsninger siden $L_2 = \frac{1}{2} \cdot L_1$.

La $a = -2$. Da har vi systemet

$$\begin{cases} 2x + 4y = -2 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \cdot (-2) \\ \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$P$$

<u>Ingen løsning</u>

Alternativt kan vi se direkte på den utvidede matrisen og forsøke med radreduksjon.

$$\begin{bmatrix} 2 & a^2 & a \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{matrix} -2 \\ \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & a^2-4 & a-2 \end{bmatrix}$$

Vi kan nå se at dersom

$a^2-4=0$ og $a-2\neq 0$

har vi ingen løsning.

$\Rightarrow$ $a=-2$: ingen løsning.

Vi ser også at

$a=2$: uendelig mange løsninger.

(Da er nederste rad $0 \quad 0 \quad 0$)

Anta $a^2-4\neq 0$. Da kan vi fortsette radreduseringen.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & a^2-4 & a-2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{a^2-4} \qquad \left(\frac{a-2}{a^2-4} = \frac{1}{a+2} \right)$$

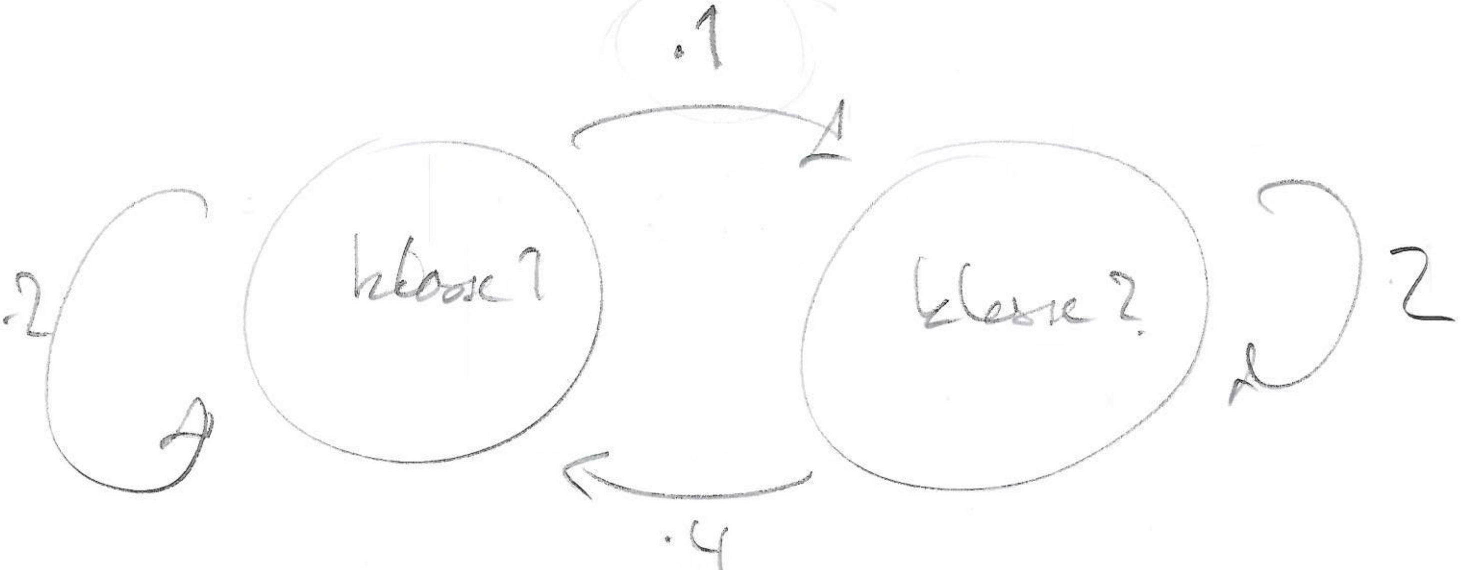
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{a+2} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ -2 \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \left(1 - \frac{2}{a+2}\right) \\ 0 & 1 & \left(\frac{1}{a+2}\right) \end{bmatrix}$$

Dermed har vi funnet én entydig løsning for alle $a \notin \{-2, 2\}$.

b) x_n: Antall planter i klasse 1.

y_n: Antall planter i klasse 2.



- "En plante i klasse 1 vil være fullt utvokst i neste sesong", og vil i tillegg gi 2 nyspirte planter".
- "En fullt utvokst plante vil derimot i gjennomsnitt gi 4 nyspirte planter".
- "Endelig antar vi at hver plante i aldersklasse 2 overlever til neste sesong, og i tillegg produserer en fullt utvokst avlegger".

$$x_{n+1} = 2x_n + 4y_n$$

$$y_{n+1} = x_n + 2y_n$$

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$$

Anta $x_0 + y_0 = 100$. Finn x_0, y_0 dersom $x_2 = 1200$, $y_2 = 600$.

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = A^2 \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 16 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

Legg merke til at A (og A^2) ikke er inverterbar.

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 16 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

Den utvidgade matrisen (med x_0, y_0 som variabler) är

$$\begin{array}{l} \left[\begin{array}{cc|c} 8 & 16 & 1200 \\ 4 & 8 & 600 \end{array}\right] \cdot \frac{1}{8} \\ \qquad\qquad x_2 \\ \qquad\qquad y_2 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 150 \\ 4 & 8 & 600 \end{array}\right] \begin{array}{c} -4 \\ \downarrow \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 150 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow x_0 + 2y_0 = 150$$

Sedan vi också vet $x_0 + y_0 = 100$ får vi ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_0 + 2y_0 = 150 \\ x_0 + y_0 = 100 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 150 \\ 1 & 1 & 100 \end{array}\right] \begin{array}{c} -1 \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 150 \\ 0 & -1 & -50 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 150 \\ 0 & 1 & 50 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ -2 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 50 \\ 0 & 1 & 50 \end{array}\right] \Rightarrow \underline{\underline{x = 50}} \quad \underline{\underline{y = 50}}.$$

Altså var det 50 planter i aldersklasse 1 og 50 planter i aldersklasse 2.