Plenum uke 44

Sumblegruppe torsdag Helga Eng, aud 3.

Ekstra på fredag, $S.15-18$, VB Aud 5.

Oppgaver: A11: 3, 4, 5

B: 1.12, 1.16

11.3 Deriver funksjonene

a) $f(x) = \ln|\cos(x)| + \sin\left(\frac{x}{2}\right)$

(Hvor er denne funksjonen definert?)

Deriverer leddene hver for seg:

$$\left(\ln|\cos(x)|\right)' \overset{(s.252)}{=} \frac{1}{\cos(x)}\left(\cos(x)\right)'$$

$$= -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \underline{\underline{-\tan x.}}$$

$$\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)' = \cos\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)' = \cos\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}$$

$$\underline{\underline{f'(x) = -\tan x + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)}}$$ (Hvor er denne def?)

b) $f(x) = \dfrac{4x^3+5x}{\sin(x+2)} = \dfrac{u(x)}{v(x)}$

Defined for $\sin(x+2) \neq 0 \iff$

$x+2 \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (heltall).

$$\left[\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}\right]$$

$u(x) = 4x^3 + 5x$

$u'(x) = 4 \cdot 3x^2 + 5 = 12x^2 + 5$

$v(x) = \sin(x+2)$

$v'(x) = \cos(x+2)(x+2)' = \cos(x+2)$

$$f'(x) = \frac{(12x^2+5)\sin(x+2) - (4x^3+5x)\cos(x+2)}{(\sin(x+2))^2}$$

---

c) $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ $(x \neq 0)$

Observer at $f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow f'(x) = 0 \quad x \neq 0.$

Alternativt:

$$\left(\frac{x}{|x|}\right)' = \frac{1\cdot|x| - x\frac{|x|}{x}}{|x|^2} = \frac{|x|-|x|}{|x|^2} = \underline{\underline{0}}.$$

e) $f(x) = e^{\overbrace{2x^2+x-1}_{u(x)}}$

$f(x) = e^{u(x)}$, $f'(x) = e^{u(x)}\cdot u'(x)$

$u'(x) = 4x+1$

$$\underline{\underline{f'(x) = (4x+1)e^{2x^2+x-1}}}$$

11.4 Deriver funksjonene:

a) $f_1(x) = \sin x \cos x + x^2$

Produktregel: $(uv)' = u'v + uv'$

$(\sin x \cos x)' = \cos x \cos x + \sin x(-\sin x)$

$= \cos^2 x - \sin^2 x.$

$$\underline{\underline{f_1'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x + 2x}}$$

b) $f_2(x) = \cos(\sqrt{x}) - \sqrt{x}$

Husk $(\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Kjerneregelen gir:

$$f_2'(x) = -\sin(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\sin\sqrt{x} + 1\right)$$

Legg merke til at $D_{f_2} = [0, \infty)$ mens

$D_{f_2'} = (0, \infty)$ ($\sqrt{x}$ ikke deriverbar i 0)

c) $f_3(x) = \dfrac{\sin(x^2)}{3x} = \overbrace{\frac{1}{3}x^{-1}}^{u(x)} \overbrace{\sin(x^2)}^{v(x)}$

(Bruker produkt regel)

$$f_3'(x) = (u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

$$u'(x) = \frac{1}{3}(-1)x^{-2} = -\frac{1}{3x^2}$$

$$v'(x) = \cos(x^2)\,2x$$

$$f_3'(x) = -\frac{1}{3x^2}\sin(x^2) + \frac{1}{3x}\cos(x^2)2x$$

$$= \frac{2}{3}\cos(x^2) - \frac{\sin(x^2)}{3x^2}$$

(Er denne definert for $x = 0$?)

11.5 Deriver følgende funksjoner:

a) $f(x) = \cos(x^2)$

$f'(x) = -\sin(x^2)2x$ (kjerneregelen)

b) $f(x) = \underbrace{4x}_{u(x)}\underbrace{\ln(x)}_{v(x)}$ $(x > 0)$

$u'(x) = 4$, $v'(x) = \frac{1}{x}$

$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

$= 4\ln(x) + 4x \cdot \frac{1}{x} = \underline{\underline{4\ln(x) + 4}}$

c) $f(x) = (e+2)x^3$

$f'(x) = (e+2)3x^2$

d) $f(x) = e^{\underbrace{2x^2 + \ln(x+2)}_{u(x)}}$

$f'(x) = e^{u(x)} u'(x)$ [Hvor er denne definert?]

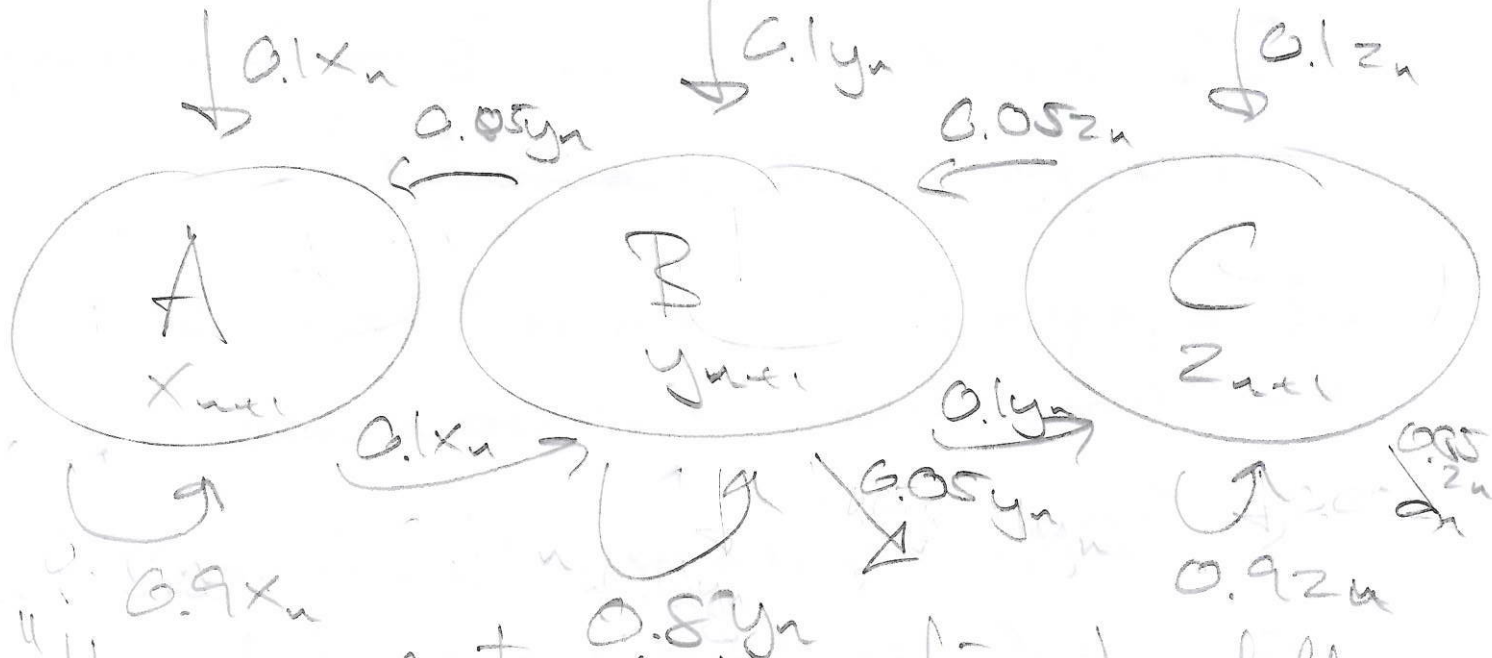
$u'(x) = 4x + \dfrac{1}{x+2}$

$f'(x) = e^{2x^2 + \ln(x+2)} \left(4x + \dfrac{1}{x+2}\right)$

B.1.12 Tre aviser A, B og C.

x_n : Salgstall for A.
y_n : —— " —— B.
z_n : —— " —— C.

I løpet av 5 år skjer følgende:



- "Hver av de tre avisene får et antall nye kjøpere som ikke har kjøpt avis før som er 10% av antallet de hadde"

- "10% av kjøperne av A slutter med A og går over til B"
- "10% av kjøperne av B slutter med B og går over til C"

- "5 % av kjøperne av B slutter med B og begynner å kjøpe A".

- "5 % av kjøpene av C går over til B"

- "5 % av kjøpene av B og C slutter å kjøpe avis overhodet".

De kjøpene (i prosent) som ikke er kommentert blir værende:

90 % av leserne av A blir
⟹ 80 % av leserne av B blir
90 % av leserne av C blir..

Dette gir oss likningene

$$x_{n+1} = (0.1 + 0.9)x_n + 0.05y_n$$

$$y_{n+1} = 0.1x_n + (0.8 + 0.1)y_n + 0.05z_n$$

$$z_{n+1} = 0.1y_n + (0.9 + 0.1)z_n$$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{20} y_n + 0 z_n$$

$$y_{n+1} = \frac{1}{10} x_n + \frac{9}{10} y_n + \frac{1}{20} z_n$$

$$z_{n+1} = 0 x_n + \frac{1}{10} y_n + z_n$$

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{20} & 0 \\ \frac{1}{10} & \frac{9}{10} & \frac{1}{20} \\ 0 & \frac{1}{10} & 1 \end{bmatrix}}_{M \text{ (i oppgave a)}} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix}$$

La

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{1}{10} & 1 & \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{1}{10} & 1 \end{bmatrix}$$

b) Finn egenverdiene og de tilsvarende egenvektorene for M.

Finner karakteristisk likning

$$\det(M-\lambda I)=0.$$

$$M-\lambda I=\begin{bmatrix} 1-\lambda & \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{1}{10} & 1-\lambda & \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{1}{10} & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{1}{10} & 1-\lambda & \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{1}{10} & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & 1-\lambda \end{vmatrix} - \frac{1}{10}\begin{vmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2-\frac{1}{100}\right]-\frac{1}{10}\left(\frac{1}{10}(1-\lambda)\right)$$

$$=(1-\lambda)\left[1^2-2\lambda+\lambda^2-\frac{1}{100}-\frac{1}{100}\right]$$

$$=(1-\lambda)\left(\lambda^2-2\lambda+\frac{98}{100}\right)$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + \frac{98}{100} = 0$$

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{98}{100}}}{2} = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{98}{100}}$$

$$= 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{10}$$

Egenverdiene blir dermed

$$\left\{ 1,\ 1 + \frac{\sqrt{2}}{10},\ 1 - \frac{\sqrt{2}}{10} \right\}.$$

Finner egenvektorene:

$\underline{\lambda = 1}$ $\quad Mx = x \iff (M - I)x = 0.$

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ \frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{matrix}$$

La $x_3 = t$. $\rightarrow$ $x_1 = -t$, $x_2 = 0$

$$\mathcal{L} = \left\{ t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Dette er dermed egenvektorene tilhørende $\lambda = 1$. Hvordan sjekke dette?

$\lambda = 1 + \frac{\sqrt{2}}{10}$. $\quad M x = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{10}\right) x \iff$

$$\left(M - \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{10}\right) I\right) x = 0$$

Dette gir oss den utvidede matrisen

$$\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{10} & \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ \frac{1}{10} & -\frac{\sqrt{2}}{10} & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & -\frac{\sqrt{2}}{10} & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot 10 \\ \cdot 10 \\ \cdot 10 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ -\sqrt{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot \sqrt{2} \\ + \\ \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \sqrt{2}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \quad x_1 - x_3 = 0$ Setter $x_3 = t$.

$x_2 - \sqrt{2}x_3 = 0$

$x_1 = t \qquad x_2 = \sqrt{2}\,t$

$$\mathcal{L} = \left\{ t \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\lambda = 1 - \frac{\sqrt{2}}{10}. \quad \left(M - \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{10}\right) I\right) x = 0.$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{10} & \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ \frac{1}{10} & \frac{\sqrt{2}}{10} & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{\sqrt{2}}{10} & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \cdot 10 \\ \cdot 10 \\ \cdot 10 \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \cdot -\sqrt{2} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \cdot -\sqrt{2} \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 - x_3 = 0 \qquad x_3 = t.$$
$$x_2 + \sqrt{2}\,x_3 = 0$$

$$x_1 = t, \quad x_2 = -\sqrt{2}\,t, \quad x_3 = t$$

$$L = \left\{ t \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Vi har dermed egenvektorer

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_1} \text{ for } \lambda = 1, \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_2} \text{ for } \lambda = 1 + \frac{\sqrt{2}}{10}$$

og $$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_3} \text{ for } \lambda = 1 - \frac{\sqrt{2}}{10}.$$

c) Bruk resultatet fra b til å uttrykke x_n, y_n, z_n ved x_0, y_0, z_0 for generelle n.

Husk at $$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} = M^n \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

Anta at vi har funnet c_1, c_2, c_3
s.a

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = c_1 \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_1} + c_2 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_2} + c_3 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_3}$$

Da følger siden v_1, v_2 og v_3 er egenvekt.

$$\underbrace{M^n \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix}} = c_1 1^n \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{10}\right)^n \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{10}\right)^n \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\Rightarrow \quad x_n = -c_1 + c_2 \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{10}\right)^n + c_3 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{10}\right)^n$$

$$y_n = c_2 \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{10}\right)^n \sqrt{2} - c_3 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{10}\right)^n \sqrt{2}$$

$$z_n = c_1 + c_2 \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{10}\right)^n + c_3 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{10}\right)^n.$$

Vi skal betrakte

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_n}{y_n} \quad \text{og} \quad \lim_{n \to \infty} \frac{y_n}{z_n}.$$

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{-C_1 + C_2\left(1+\frac{\sqrt{2}}{10}\right)^n + C_3\left(1-\frac{\sqrt{2}}{10}\right)^n}{C_2\left(1+\frac{\sqrt{2}}{10}\right)^n\sqrt{2} - C_3\left(1-\frac{\sqrt{2}}{10}\right)^n\sqrt{2}}$$

Deler oppe og nede på $\left(1+\frac{\sqrt{2}}{10}\right)^n$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{C_2}{C_2\sqrt{2}} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}}} \quad \left(\begin{array}{c}\text{forutsetning}\\ C_2 \neq 0\end{array}\right)$$

$$\frac{y_n}{z_n} = \frac{C_2\left(1+\frac{\sqrt{2}}{10}\right)^n\sqrt{2} - C_3\left(1-\frac{\sqrt{2}}{10}\right)^n\sqrt{2}}{C_1 + C_2\left(1+\frac{\sqrt{2}}{10}\right)^n + C_3\left(1-\frac{\sqrt{2}}{10}\right)^n}$$

Deler oppe og nede på $\left(1+\frac{\sqrt{2}}{10}\right)^n$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{z_n} = \frac{C_2\sqrt{2}}{C_2} = \underline{\underline{\sqrt{2}}}. \quad (C_2 \neq 0)$$

Hva er betingelsen for at $C_2 \neq 0$?

~~Husk~~

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

Den utvidede matrisen er

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & x_0 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & y_0 \\ 1 & 1 & 1 & z_0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & z_0 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & y_0 \\ 0 & 2 & 2 & z_0+x_0 \end{bmatrix} \cdot -\sqrt{2} \quad \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & z_0 \\ 0 & 1 & -1 & y_0/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 4 & z_0+x_0-\sqrt{2}y_0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{4}$$

$$\sim \Big[$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & z_0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{y_0}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4}(z_0 + x_0 - \sqrt{2}\,y_0) \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4}(z_0 + x_0 - \sqrt{2}\,y_0) \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \quad c_2 = \frac{y_0}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4}(z_0 + x_0 - \sqrt{2}\,y_0)$$

$$= \frac{1}{4}x_0 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)y_0 + \frac{1}{4}z_0$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{1}{2}\right) > 0.$$

Dermed følger at $c_2 > 0$ dersom x_0, y_0, z_0 er positive og minst en er forskjellig fra null.

B.1.16

a) Finn egenverdiene og egenvektorene til matrisen

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{9} \\ \frac{5}{9} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Kar. likn.: $\det(M - \lambda I) = 0$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & \frac{5}{9} \\ \frac{5}{9} & \frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)^2 - \left(\frac{5}{9}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \lambda + \lambda^2 - \frac{25}{81}$$

$$= \lambda^2 - \lambda + \underbrace{\left(\frac{1}{4} - \frac{25}{81}\right)}_{\frac{81 - 4 \cdot 25}{4 \cdot 81}}$$

$$= \lambda^2 - \lambda - \frac{19}{4 \cdot 81}$$

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{19}{4 \cdot 81}\right)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{\frac{81}{81} + \frac{19}{81}}}{2}$$

$$= \frac{1 \pm \frac{10}{9}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{9}.$$

Egenverdiene er $\left\{ \frac{1}{2} + \frac{5}{9}, \frac{1}{2} - \frac{5}{9} \right\}$.

$\underline{\lambda = \frac{1}{2} + \frac{5}{9}}$ $\quad (M - \lambda I)x = 0$

$$\begin{bmatrix} -\frac{5}{9} & \frac{5}{9} & 0 \\ \frac{5}{9} & -\frac{5}{9} & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 - x_2 = 0$$

$$x_2 = t.$$

$$\mathcal{L} = \left\{ t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\lambda = \frac{1}{2} - \frac{5}{9} \qquad (M - \lambda I)x = 0$$

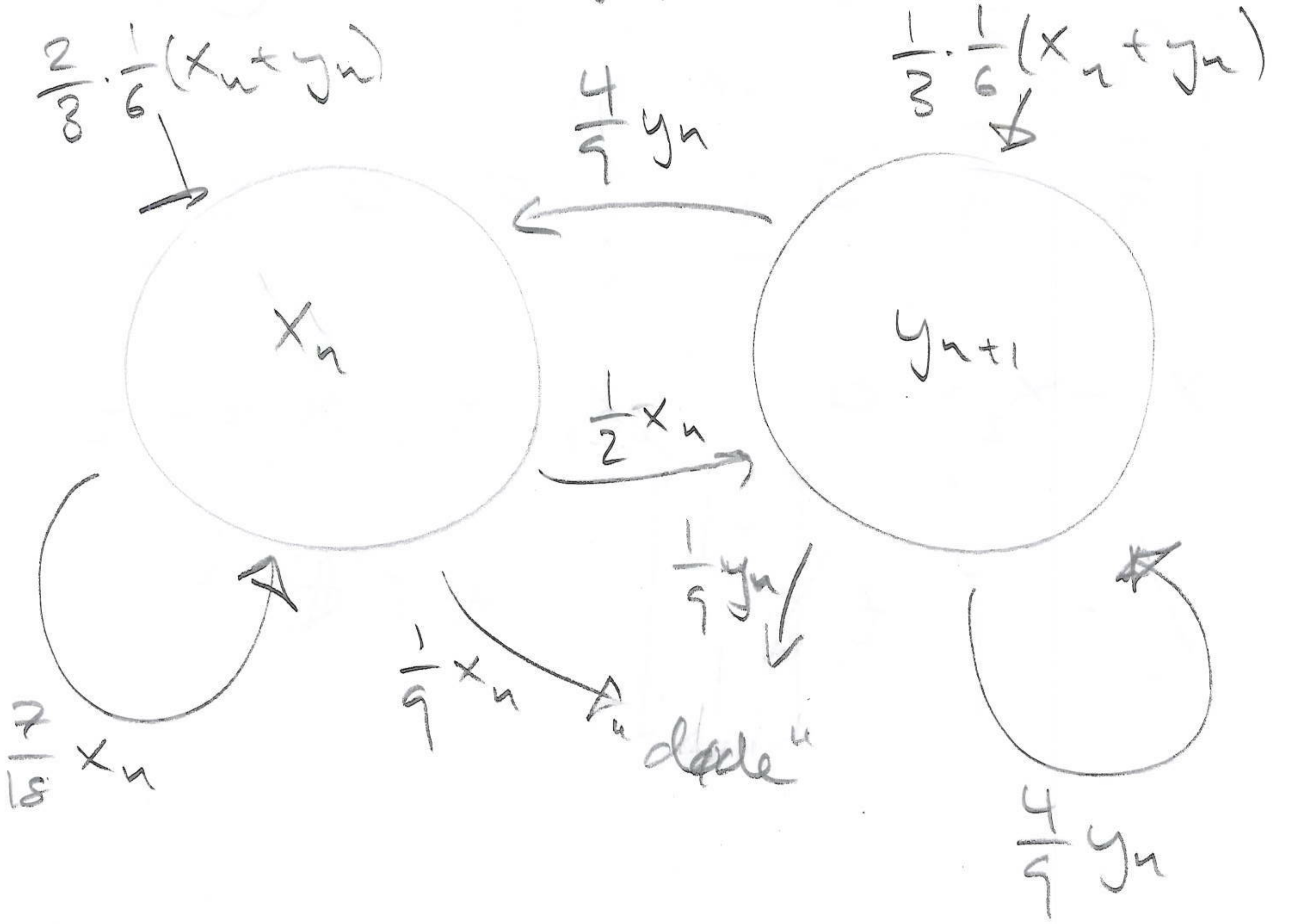
$$\begin{bmatrix} \frac{5}{9} & \frac{5}{9} & 0 \\ \frac{5}{9} & \frac{5}{9} & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 + x_2 = 0 \qquad x_2 = t \quad x_1 = -t.$$

$$L = \left\{ t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

y_n: Antall immune etter $10n$ år.

x_n: Antall mottakelig (for smitte) etter $10n$ år.



"Av dem som er immune et år vil $\frac{4}{9}$ fremdeles være immune 10 år senere, $\frac{1}{9}$ døde og resten mottakelig"

"Av dem som er mottakelig for smitte et år vil halvparten være immune 10 år senere, $\frac{1}{9}$ vil være døde, og resten fremdeles mottakelig."

"I løpet av en 10 årsperiode vil befolkningen få et tilskudd på grunn av fødsel og innvandring. Dette tilskuddet er $\frac{1}{6}$ av befolkningstallet ved begynnelsen av perioden og ved slutten av perioden vil $\frac{1}{3}$ av de nye individene være immune, mens resten er mottakelig."

b) Vis at $\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$

$$x_{n+1} = \frac{7}{18} x_n + \frac{4}{9} y_n + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} (x_n + y_n)$$

$$= \frac{1}{2} x_n + \frac{5}{9} y_n$$

$$y_{n+1} = \frac{4}{9} y_n + \frac{1}{2} x_n + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} (x_n + y_n)$$

$$= \frac{1}{2} y_n + \frac{5}{9} x_n$$

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{9} \\ \frac{5}{9} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}.$$

c) Anta $x_0 = 8$, $y_0 = 2$ (mill.)

Finn x_n og y_n.

Uttrykker $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ som lineær kombinasjon av egenvektorer.

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = c_1 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\lambda = \frac{1}{2} + \frac{5}{9}} + c_2 \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\lambda = \frac{1}{2} - \frac{5}{9}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \left(= \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 8 \\ 0 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow c_1 = 5, \quad c_2 = -3.$$

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = M^n \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

$$= c_1 M^n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 M^n \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= c_1 \left(\frac{19}{18}\right)^n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \left(-\frac{1}{18}\right)^n \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= 5 \cdot \left(\frac{19}{18}\right)^n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 3 \left(-\frac{1}{18}\right)^n \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_n = 5 \cdot \left(\frac{19}{18}\right)^n + 3 \left(-\frac{1}{18}\right)^n$$

$$y_n = 5 \left(\frac{19}{18}\right)^n - 3 \left(-\frac{1}{18}\right)^n$$

d) Etter som tiden går vil prosent-andelen av immune nærme seg en grense. Hva er denne?

Vi betrakter forholdet $\dfrac{y_n}{x_n + y_n}$

$$x_n + y_n = 10\left(\frac{19}{18}\right)^n.$$

$$\frac{y_n}{x_n + y_n} = \frac{5\left(\frac{19}{18}\right)^n - 8\left(-\frac{1}{18}\right)^n}{10\left(\frac{19}{18}\right)^n}$$

$$\Rightarrow \lim \frac{y_n}{x_n + y_n} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Prosentandelen immune nærmer seg 50 %.