Oppgaver A.8:

2)

a) $x_{n+2} - \frac{1}{2} x_{n+1} = \frac{1}{2} x_n \quad , n \geq 0, \quad x_0 = 2, x_1 = \frac{1}{2}$

$x_{n+2} - \frac{1}{2} x_{n+1} - \frac{1}{2} x_n = 0$

$r^2 - \frac{1}{2} r - \frac{1}{2} = 0 \;, \; r = \dfrac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 4(-\frac{1}{2})}}{2}$

$$= \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2}}{2} = \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}}}{2} = \frac{\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}}{2} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Generell løsning

$x_n = C\left(-\frac{1}{2}\right)^n + D, \qquad x_0 = C + D = 2 \quad L_1$

$\qquad x_1 = -\frac{C}{2} + D = \frac{1}{2} \quad L_2$

$L_1 - L_2 \quad \frac{3}{2} C = \frac{3}{2}, \; C = 1 \;, \; D = 2 - C = 1$

$$\underline{\underline{x_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n + 1}}$$

b) Hva skjer når $n \to \infty$

Siden $|(-\frac{1}{2})| < 1$ vil $(-\frac{1}{2})^n \to 0$ når $n \to \infty$.

så $x_n \to 1$ når $n \to \infty$.

5) Handler om bier.

En hannbi er et resultat av et ~~ub~~ ubefruktet egg, dvs. at en hannbi har én mor og ingen far. En hunnbi kommer fra et befruktet egg, og hunnbien har en mor og en far.

Starter med én hannbi

La z_k være antall forgjengere k-generasjonen bakover

$z_0 = 1,\ z_1 = 1,\ z_2 = 2,\ z_3 = 3, \ldots\ z_k = ?$

x_k antall forfedre k generasjonen bakover

y_k — " — formødre — " —

$$z_k = x_k + y_k,$$

$$x_{k+1} = y_k, \quad y_{k+1} = x_k + y_k = z_k$$

$$z_{k+1} = x_{k+1} + y_{k+1} = y_k + (x_k + y_k) = z_{k-1} + z_k$$

$z_{k+2} = z_{k+1} + z_k$ differenslikning for Fibonacci tall, videre er $z_0 = 1,\ z_1 = 1$

z_k = k-te Fibonacci tall. Har formel for disse (se boka s. 114, formel (5.5))

$$z_k = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right)$$

8.9

a) $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = 9n$. $x_0 = 3$, $x_1 = 3$

Vil finne spesiell løsning på form

$x_n^s = An + B$

$(A(n+2)+B) - 6(A(n+1)+B) + 8(An+B)$

$= 3An + (-4A+3B) = 9n$, $\quad 3A = 9$, $A = 3$

$-4A + 3B = 0$, $B = 4$

$x_n^s = 3n+4$, $\quad x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = 0$

$r^2 - 6r + 8 = 0$, $r = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = \begin{cases} 4 \\ 2 \end{cases}$

$x_n^h = C(4)^n + D(2)^n$,

$x_n = C\,4^n + D\,2^n + 3n + 4 = x_n^h + x_n^s$

$x_0 = C + D + 4 = 3 \qquad C + D = -1 \quad L_1$

$x_1 = 4C + 2D + 7 = 3 \qquad 4C + 2D = -4 \quad L_2$

$L_2 - 2L_1 \quad (4C+2D) - (2C+2D) = 2C = -4 - 2(-1) = -2$

$C = -1$, $D = -1 - C = -1 - (-1) = 0$, $\underline{\underline{x_n = -4^n + 3n + 4}}$.

8.9

b) $x_{n+2} + 2x_{n+1} - 3x_n = 4$

$x_0 = -1, \quad x_1 = -8$

Pröver först $x_n^s = A$

$A + 2A - 3A = 0 = +4 \quad ?$

Pröver istället med $x_n^s = An$

$A(n+2) + 2(A(n+1)) - 3An =$

$= 0 \cdot An + 4A = 4, \quad A = 1. \quad x_n^s = n$

$r^2 + 2r - 3 = 0, \quad r = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \begin{cases} 1 \\ -3 \end{cases}$

$x_n^h = C + D(-3)^n, \quad x_n = C + D(-3)^n + n$

$x_0 = C + D = -1 \quad L_1 \qquad L_1 - L_2$

$x_1 = C - 3D + 1 = -8 \quad L_2 \qquad 4D - 1 = 7, \; 4D = 8, \; D = 2$

$C = -1 - D = -3, \quad \underline{\underline{x_n = -3 + 2(-3)^n + n}}$

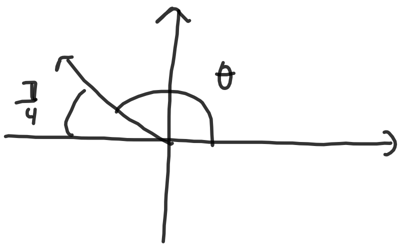
8.9 c) $X_{n+2} + 2X_{n+1} + 2X_n = 5$, $X_0 = 2$, $X_1 = 1$

$X_n^s = A$, $A + 2A + 2A = 5A = 5$, $A = 1$

$r^2 + 2r + 2 = 0$, $r = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2}$

$= \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i$. $-1 + i = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$

$\rho = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $\cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$, $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, er i 2. kvadrant



$\frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

$X_n^h = C(\sqrt{2})^n \cos n\frac{3\pi}{4} + D(\sqrt{2})^n \sin n\frac{3\pi}{4}$

$X_n = C(\sqrt{2})^n \cos n\frac{3\pi}{4} + D(\sqrt{2})^n \sin n\frac{3\pi}{4} + 1 = X_n^h + X_n^s$

$X_0 = C + 1 = 2$, $C = 1$

$X_1 = C\sqrt{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) + D\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 1 = -C + D + 1 = 1$

$= -1 + D + 1 = 1$, $D = 1$

$$\underline{\underline{X_n = (\sqrt{2})^n \cos n\frac{3\pi}{4} + (\sqrt{2})^n \sin n\frac{3\pi}{4} + 1}}$$

(Hopper over d)) Hopper over 8.10

Eksamensoppgaver

2.2

a) $z^2 - 6z + 12 = 0$. Løs og skriv på polarform.

$$z = \frac{6 \pm \sqrt{36-48}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-12}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}i}{2}$$

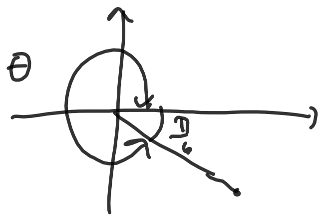
$$= \underline{3 \pm \sqrt{3}i} = \rho(\cos\theta + i\sin\theta), \quad \rho = ?, \quad \theta = ?$$

$\rho = \sqrt{9 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3}$, $\underline{z_1 = 3 + \sqrt{3}i}$

$\cos\theta_1 = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$, $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$

$z_2 = 3 - \sqrt{3}i$, $\cos\theta_2 = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\theta_2 = \frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{2}$

Her er vi i 4. kvadrant.



$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$

$z_1 = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$, $z_2 = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$

(På polarform)

(På eksponentiell form; $z_1 = 2\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{6}}$, $z_2 = 2\sqrt{3}\,e^{i\frac{11\pi}{6}}$)

b) $X_{n+2} - 6X_{n+1} + 12X_n = 49n$, $x_0 = 4$, $x_1 = 12$

$x_n^s = An + B$

$(A(n+2)+B) - 6(A(n+1)+B) + 12(An+B)$

$= 7An + (-4A + 7B) = 49n$

$7A = 49$, $A = 7$

$-4A + 7B = 0 \qquad 7B = +4\cdot 7$, $B = +4$

$X_n^s = 7n + 4$

$$X_n = C(2\sqrt{3})^n \cos\frac{n\pi}{6} + D(2\sqrt{3})^n \sin\frac{n\pi}{6}$$

$+ 7n + 4$ (fra a))

$X_0 = C + 4 = 4$, $C = 0$

$X_1 = D(2\sqrt{3})\frac{1}{2} + 7 + 4 = 12 \qquad \sqrt{3}D = 1$, $D = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\underline{\underline{X_n = \frac{1}{\sqrt{3}}(2\sqrt{3})^n \sin\frac{n\pi}{6} + 7n + 4}}$$

2.5

Har et fond. Start kapital $x_0 = 15$ millioner $= 10^6$

Renter 6% pr. år.

Utbetaling etter 1. år 500 000

Utbetalingen øker med 60.000 for hvert år

~~Utbet~~ $x_n = ?$ (fondets størrelse etter n år?)

$$X_{n+1} = (X_n + \underbrace{0.06X_n}_{\text{renter}}) - (\underbrace{500.000 + n\,60.000}_{\text{utbetaling etter } n+1 \text{ år}})$$

$X_{n+1} = 1.06X_n - 0.06n - 0.5$ (i millioner)

$X_n^s = An + B$,

$(A(n+1)+B) - 1.06(An+B) =$

$= -0.06An + (A - 0.06B) = -0.06n - 0.5$

$A = 1 \quad -0.06B = -0.5 - 1, \quad B = 25$

Generell løsning

$X_n = C(1.06)^n + n + 25, \quad X_0 = 15$

$C + 25 = 15, \quad C = -10, \quad X_n = -10(1.06)^n + n + 25$

Når $n \to \infty$ vil $(1.06)^n \to \infty$ fordi $1.06 > 1$

$X_n \to -\infty$ $n \to \infty$. Betyr at fondet går i 0

og vi stoppe utbetalingene. Kan vi endre x_0 så

dette ikke skjer? $X_n = C(1.06)^n + n + 25$

$X_0 = C + 25 = x_0$ vi vil ha $C \geq 0$

$C = x_0 - 25, \quad x_0 \geq 25$ hvis utbetalingen

kan fortsette (til evig tid).