3

b)
$$\begin{aligned} 2x+2y+4z&=16\\ x+y+z&=4\\ -x+y+2z&=6 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & 16\\ 1 & 1 & 1 & 4\\ -1 & 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} \tfrac{1}{2}R_1 \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8\\ 1 & 1 & 1 & 4\\ -1 & 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} -R_1 \text{ til } R_2\\ R_1 \text{ til } R_3 \end{matrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8\\ 0 & 0 & -1 & -4\\ 0 & 2 & 4 & 14 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{Bytter om}\\ R_2 \text{ og } R_4 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8\\ 0 & 2 & 4 & 14\\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{bmatrix} \tfrac{1}{2}R_2 \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8\\ 0 & 1 & 2 & 7\\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{bmatrix} (-1)R_3 \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8\\ 0 & 1 & 2 & 7\\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} -R_2 \text{ til } R_1 \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 7\\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} -2R_3 \text{ til } R_2 \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x &= 1\\ y &= -1\\ z &= 4 \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{(x,y,z) = (1-1,4)}}$$

5)
$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 6 \\ y - z &= 2 \\ x + 3y + 4z &= 8 \\ x + y + 2z &= 4 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Bytter om} \\ R_1 \text{ og } R_4 \end{array} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 8 \\ 2 & -1 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ -R_1 \text{ til } R_3 \\ -2R_1 \text{ til } R_4 \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ -2R_2 \text{ til } R_3 \\ 3R_2 \text{ til } R_4 \end{array} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 4 \end{bmatrix} \tfrac{1}{4} R_3 \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} 6R_3 \text{ til} \\ R_4 \end{array} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

siste likning her blir

$0 = 4$ umulig

Ingen lösning.

~~7b)~~ 5 b) $2x + y - z = 5$

$x - 5y + 7z = -14$

$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -5 & 7 & -14 \end{bmatrix}$ Bytter om R_1 og R_2 $\sim$ $\begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 & -14 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ $-2R_1$ til R_2 $\sim$

$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 & -14 \\ 0 & 11 & -15 & 33 \end{bmatrix}$ $\frac{1}{11}R_2$ $\sim$ $\begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 & -14 \\ 0 & 1 & \frac{-15}{11} & 3 \end{bmatrix}$ $5R_2$ til R_1 $\sim$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{11} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{-15}{11} & 3 \end{bmatrix}$ $x + \frac{2}{11}z = 1$ Setter $z = t$

$y - \frac{15}{11}z = 3$

$\{(x, y, z)\} = \{(1 - \frac{2}{11}t, 3 + \frac{15}{11}t, t) : t \in \mathbb{R}\}$

7 For hvilke verdier av a har vi

① ingen løsning, ② én løsning, ③ ∞-mange-løsninger

$$x+2y-3z=4$$
$$3x-y+5z=2$$
$$4x+y+(a^2-14)z=a+2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & a^2-14 & a+2 \end{bmatrix} \begin{matrix} -3R_1 \text{ til } R_2 \\ -4R_1 \text{ til } R_3 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & -7 & a^2-2 & a-14 \end{bmatrix} -R_2 \text{ til } R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & 0 & a^2-16 & a-4 \end{bmatrix}$$ siste likning blir nå $(a^2-16)z = a-4$

$a^2-16=0$ gir oss $a=4$ eller $a=-4$

Hvis nå $a=-4$ blir siste likning $0=-8$ umulig. Har ingen løsning når $a=-4$

Hvis $a \neq 4$ og $a \neq -4$ så er $a^2-16 \neq 0$

$$z = \frac{a-4}{a^2-16} = \frac{\cancel{a-4}}{(\cancel{a-4})(a+4)} = \frac{1}{a+4}, \quad -7y+14z=-10$$

$y = \frac{10}{7}+2z$, $x+2y-3z=4$, $x=-2y+3z+4$

Får én løsning. La $a=4$ siste likning gir da at $(a^2-16)z=a-4$ bli $0=0$

Får nå at x og y kan uttrykkes ved z som over men z kan velges fritt. Får altså ∞-mange løsninger når $a=4$

11)

a) $x+y+z=24$ $\quad$ n er et naturlig tall.
$5x+3y+z=n$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 24 \\ 5 & 3 & 1 & n \end{bmatrix} \begin{matrix} -5R_1 \\ \text{til } R_2 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 24 \\ 0 & -2 & -4 & n-120 \end{bmatrix} -\tfrac{1}{2}R_2 \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 24 \\ 0 & 1 & 2 & 60-\frac{n}{2} \end{bmatrix} \begin{matrix} -R_2 \text{ til} \\ R_1 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{n}{2}-36 \\ 0 & 1 & 2 & 60-\frac{n}{2} \end{bmatrix}, \quad z=t$$

får:

$y = 60-\frac{n}{2}-2t$, $x = \frac{n}{2}-36+t$

b) 24 øvelser, skal tippes på vinner.
5 poeng for riktig gull, 3 poeng for sølv, 1 poeng for bronse
Anta at alle det tippes på tar medalje.
Ragnar - tar 82 poeng, Magnus - 64 poeng.

x = # gull for Magnus = # sølv Ragnar = v
y = # sølv Magnus = # bronse Ragnar = w
z = # bronse Magnus = # gull Ragnar = u

$(x,y,z) = ?$, $(u,v,w) = ?$

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 24 \\ u + v + w &= 24 \\ 5x + 3y + z &= 64 \\ 5u + 3v + w &= 82 \\ x &= v \\ y &= w \\ z &= u \end{aligned}\right\}$$

Har fra a);

$z = t$, $y = 28 - 2t$, $x = t - 4$

$(n = 64)$

$w = s$, $v = 19 - 2s$,

$u = 5 + s \quad (n = 82)$

$$t - 4 = 19 - 2s \qquad L_1$$
$$28 - 2t = s \qquad L_2$$
$$t = 5 + s \qquad L_3$$

setter L_3 inn i L_1

$1 + s = 19 - 2s$, $3s = 18$

$s = 6$, $t = 11$

$(x, y, z) = (7, 6, 11)$

$(u, v, w) = (11, 7, 6)$

Bytter om slik at

#Ragnar gull =

Magnus sølv

Ragnar sølv =

= # Magnus bronse

Ragnar bronse =

Magnus gull. Får da

$u = y$, $v = z$

$w = x$ Erstatte de

3 siste likningene fra isted

med dette (Som se

fasit)

1.8

Befolkning delt i to grupper.

① I byen x_n } antall ved tiden n

② På landet y_n }

$$x_{n+1} = x_n + 0.3 y_n$$
$$y_{n+1} = 0.1 x_n + 0.8 y_n$$

a) Med hvor mange prosent øker befolkningen fra n til $n+1$

$$x_{n+1} + y_{n+1} = (x_n + 0.3 y_n) + (0.1 x_n + 0.8 y_n) =$$
$$= (1.1) x_n + (1.1) y_n = (1.1)(x_n + y_n)$$

Befolkning må øke med $\underline{10\%}$

b) Finn M slik at

$$\begin{bmatrix} x_{n+2} \\ y_{n+2} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.3 \\ 0.1 & 0,8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.3 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_{n+2} \\ y_{n+2} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} =$$

$$= A A \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}, \quad M = AA = \begin{bmatrix} 1 & 0.3 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0.3 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.03 & 0.54 \\ 0.18 & 0.67 \end{bmatrix}$$

c) Finn en matrise N slik at

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = N \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$a(\underbrace{x_n+0.3y_n}_{x_{n+1}}) + b(\underbrace{0.1x_n+0.8y_n}_{y_{n+1}}) = x_n$$

$$c(x_n+0.3y_n)+d(0.1x_n+0.8y_n) = y_n$$

$$\left.\begin{aligned} (a+0.1b-1)x_n + (0.3a+0.8b)y_n &= 0 \\ (c+0.1d)x_n + (0.3c+0.8d-1)y_n &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Velges $x_n=1, y_n=0$ får vi; velges $x_n=0, y_n=1$

$$\left.\begin{aligned} a+0.1b &= 1 \qquad & 0.3a+0.8b &= 0 \\ c+0.1d &= 0 \qquad & 0.3c+0.8a &= 1 \end{aligned}\right\} \text{4 likninger med 4 ukjente løses}$$

får $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{80}{77} & -\frac{30}{77} \\ -\frac{10}{77} & \frac{100}{77} \end{pmatrix}$