A 12 4,5

B3 4,5

$$y' = f(x)g(y)$$

$$\frac{y'}{g(y)} = f(x), \quad \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dt$$

$$G(y) = F(x) + C$$

B3 4)

a)

$N(t)$ antall elger i en populasjon ved tiden t. Relativ fødselsrate er 0.14

—"— dødsrate 0.09

—"— jaktrate k

Sett opp diff likning for $N(t)$

$$\underbrace{\frac{dN}{dt}}_{} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{fødte}}}{0.14N} - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{døde}}}{0.09N} - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{tas ut i jakt}}}{kN} = (0.05-k)N$$

$t=0$ har vi 2000 elger $N(0) = 2000$

Skal ha $N(20) = 2500$ elger finn k?

(Løses som separabel) $\dfrac{dN}{dt\, N} = 0.05-k$

$$\int \frac{dN}{N} = \int (0.05-k)dt \quad \left(\frac{dN}{dt} - (0.05-k)N = 0 \right.$$

$\frac{dN}{dt}$ " f, 0 " g

er også en 1. ordens lineær)

$$\int \frac{dN}{N} = \int (0.05-k)\,dt \,, \quad \ln N = (0.05-k)t + C$$

$$N(t) = e^{\ln(N(t))} = e^{C} e^{(0.05-k)t} \,, \quad N(0) = 2000$$

$$N(0) = e^{C} \cdot e^{0} = e^{C} = 2000 \,, \quad N(t) = 2000\, e^{(0.05-k)t}$$

$$N(20) = 2000\, e^{(0.05-k)\cdot 20} = 2500$$

$$e^{1-20k} = \frac{2500}{2000} = 1.25 \,,$$

$$1 - 20k = \ln(e^{1-20k}) = \ln(1.25)$$

$$k = \frac{1 - \ln(1.25)}{20} \approx 0.04$$

b) Ny modell, relativ jaktrate er proporsjonal med antall elg, dvs $(cN)N = cN^2$ gir hvor mange elg som tas ut med jakt pr. tidsenhet. Vi får

$\frac{dN}{dt} = 0.05N - cN^2$, $\frac{dN}{N(0.05-cN)} = dt$, skal finne c slik at $N(t) \to 2500$ når $t \to \infty$

$\int \frac{dN}{N(0.05-cN)} = \int dt$, $I = \int \frac{dN}{N(0.05-cN)}$

$\frac{1}{N(0.05-cN)} = \frac{A}{N} + \frac{B}{0.05-cN}$, $A(0.05-cN) + BN$
$= (B-cA)N + 0.05A = 1$

Må ha $B-cA=0$, $0.05A=1$, $A=20$, $B=20c$

$$I = \int\left(\frac{20}{N} + \frac{20c}{0.05-cN}\right)dN$$

$$= 20\ln N - 20\ln(0.05-cN)$$

$$= 20\ln\frac{N}{0.05-cN}$$

$$I = 20 \ln \frac{N}{0.05 - cN} = \int dt$$

$$= t + K$$

$$\ln \frac{N}{0.05 - cN} = \frac{t}{20} + \frac{K}{20}, \quad L = \frac{K}{20}$$

$$\frac{N(t)}{0.05 - cN(t)} = e^{L} \cdot e^{\frac{t}{20}}$$

$$N(t) = e^{L} e^{\frac{t}{20}} (0.05 - cN(t))$$

$$N(t)(1 + c e^{L} e^{t/20}) = e^{L} e^{t/20} \cdot 0.05$$

$$N(t) = \frac{(e^{L} e^{t/20})\, 0.05}{1 + c e^{L} e^{t/20}} = $$

$$= \frac{0.05}{\underbrace{\frac{1}{e^{L}} e^{-t/20}}_{\substack{\downarrow\, t \to \infty \\ 0}} + c} \xrightarrow[t \to \infty]{} \frac{0.05}{c}$$

Shd hc

$$\frac{0.05}{c} = 2500$$

$$c = \frac{0.05}{2500} = \frac{5 \cdot 10^{-2}}{2.5 \cdot 10^{3}} = \underline{2 \cdot 10^{-3}}$$

B3.5

Har ett radioaktivt stoff

a) Stoffet har halveringstid T

$x(t)$ mengden av stoffet ved tiden t

$x(t) = ?$ (uttrykt ved T og $x(0)$)

Har en modell $\frac{x'(t)}{x(t)} = \lambda$ (en konstant)

$x'(t) = \lambda x(t)$, $\int \frac{x'(t)\,dt}{x(t)} = \int \lambda\,dt$

~~tar~~ $\int \frac{dx}{x} = \int \lambda\,dt$, $\ln x = \lambda t + C$

$x(t) = e^{\lambda t} \cdot e^{C}$, $x(0) = e^{C} e^{0} = e^{C}$, $x(t) = x(0)e^{\lambda t}$

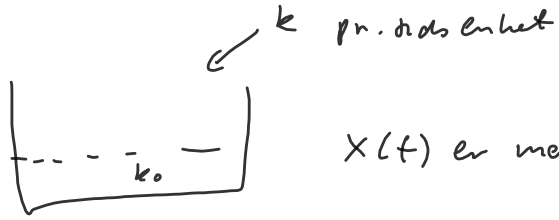
Har $x(T) = \frac{1}{2}x(0) = x(0)e^{\lambda T}$, $e^{\lambda T} = \frac{1}{2}$

$\lambda T = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$, $\lambda = -\frac{\ln 2}{T}$

$x(t) = x(0)e^{-\frac{\ln 2}{T}t}$

b) Gjenåpner lagringssted for radioaktivt avfall

Ved gjenåpning ved $t=0$ har vi mengde k_0
av stoffet, tar imot k av stoffet pr tidsenhet



$X(t)$ er mengden stoff ved tiden t

$$\frac{dx}{dt} = \underbrace{-\lambda x}_{\text{avtar}} + \underbrace{k}_{\text{tilført}} \quad , \quad \lambda = \frac{\ln 2}{T} \quad , \quad x(0) = k_0$$

$\lambda > 0$

c) Vil ha $\frac{dx}{dt} \leq 0$, $\quad x(t) \leq x(0)$

vil velge k slik at vi får dette

$$\frac{dx}{dt} \leq 0 , \quad -\lambda x + k \leq 0 , \quad k \leq \lambda x \leq \lambda x(0) = \frac{\ln 2}{T} x(0)$$

(nødvendig betingelse på k)

d) $x(t) = ?$ $\qquad \frac{dx}{dt} + \lambda x = k$

(1. ordens lineær likning) $f(t) = \lambda$, $g(t) = k$

$$\int f(t)\,dt = \lambda t , \quad \int \cancel{e^{\lambda(t)}} \quad \int e^{\lambda t} k\,dt = \frac{k}{\lambda} e^{\lambda t} + C$$

$$\left(\int e^{\int f(t)\,dt} g(t)\,dt \right)$$

$$x(t) = e^{-\int f(t)\,dt} \left(\int e^{\int f(t)} g(t)\,dt + C \right)$$

$$= e^{-\lambda t} \left(\frac{k}{\lambda} e^{\lambda t} + C \right) = \frac{k}{\lambda} + C e^{-\lambda t}$$

$$= \frac{T}{\ln 2} k + C e^{-\frac{\ln 2}{T} t} , \quad x(0) = k_0 , \quad \frac{T}{\ln 2} k + C = k_0$$

$$= \frac{T}{\ln 2} k + \left(k_0 - \frac{T}{\ln 2} k \right) e^{-\frac{\ln 2}{T} t}$$

Hadde fra c) at

$$k \leq \frac{\ln 2}{T} X(0) = \frac{\ln 2}{T} k_0$$

ser at mengde radioaktivt stoff avtar nå

$$k_0 - \frac{T}{\ln 2} k > 0$$

dvs $\frac{\ln 2}{T} k_0 > k$.

Bekrefter resultatet fra c)

12.4

a) $y' - 2x\sqrt{y} = 0 \quad y > 0$

$\frac{y'}{\sqrt{y}} = 2x, \quad \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int 2x\,dx, \quad 2\sqrt{y} = x^2 + C$

$\sqrt{y} = \frac{x^2}{2} + C, \quad (C := \frac{1}{2}C)$

$$\underline{\underline{y = \left(\frac{x^2}{2} + C\right)^2}}$$

b) $y' = \sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$

$\frac{y'}{\sqrt{y}} = \sqrt{x}, \quad \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int \sqrt{x}\,dx$

$2\sqrt{y} = \frac{2}{3}x^{3/2} + C, \quad \sqrt{y} = \frac{1}{3}x^{3/2} + C$

$$\underline{\underline{y = \left(\frac{1}{3}x^{3/2} + C\right)^2}}$$

c) $y' = 2x\sqrt{y-1}. \quad \frac{y'}{\sqrt{y-1}} = 2x$

$\int \frac{dy}{\sqrt{y-1}} = \int 2x\,dx, \quad 2\sqrt{y-1} = x^2 + C$

$\sqrt{y-1} = \frac{1}{2}x^2 + C, \quad y - 1 = \left(\frac{1}{2}x^2 + C\right)^2$

$$\underline{\underline{y = \left(\frac{1}{2}x^2 + C\right)^2 + 1}}$$

12.5

a) $y^2 y' = 5x$, $\int y^2 dy = \int 5x\,dx$

$\frac{1}{3} y^3 = \frac{5}{2} x^2 + C$, $y^3 = \frac{15}{2} x^2 + C$

$$y = \left(\frac{15}{2} x^2 + C\right)^{\frac{1}{3}}$$

b) $\frac{1}{x} y' = \cos x$, $x \neq 0$

$y' = x \cos x$, $\int dy = \int x \cos x\,dx$

$y = \int x \cos x\,dx = x \sin x - \int \sin x\,dx$

$v' = \cos x$, $u = x$
$v = \sin x$ $u' = 1$

$$= \underline{\underline{x \sin x + \cos x + C}}$$

(Strengt tatt skal vi ha $x \neq 0$
+) kan da velge to uavhengige C'er én når $x > 0$
-) én når $x < 0$)

c) $e^y y' = e^{2x}$,

$\int e^y dy = \int e^{2x} dx$, $e^y = \frac{1}{2} e^{2x} + C$

$y = \ln\left(\frac{1}{2} e^{2x} + C\right)$, må ha $\frac{1}{2} e^{2x} + C > 0$

Så for et valg $C < 0$ må $e^{2x} > -2C$

$2x > \ln(-2C)$, $x > \frac{1}{2} \ln(-2C)$