A.2: 12, 13

12

a) $\det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$

(N.B. nxn enhetsmatrisen har alltid determinant lik 1)

b) $\det \begin{bmatrix} 15 & 2 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = 15 \cdot 8 - 0 \cdot 2 = 120$

c) $\det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$

$= 2(6-16) - 0 + 0 = \underline{-20}$

d) $\det \begin{bmatrix} 30 & 2 \\ -40 & 4 \end{bmatrix} = 30 \cdot 4 - (-40 \cdot 2)$

$= 120 + 80 = \underline{200}$

13)

a) $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 3\cdot 4 - 5\cdot(-2) = 12 + 10 = \underline{22}$

b) $\begin{vmatrix} -5 & 6 \\ -7 & -2 \end{vmatrix} = 10 + 42 = 52$

c) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & -7 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix} = (-2)\begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} =$

$= (-2)(10 + 42) - (6+7) + 4(18-5) =$

$= -104 - 13 + 52 = \underline{-65}$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & -9 & 6 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & -9 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & -9 & 6 \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+4\begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 2 & 0 & -9 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\left(9\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\right) - 3\left(2\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}\right)$$

$$+ 4\left(2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right) - 6\left(2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 9\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right)$$

$$= 2(-18-6) - 3(4-24) + 4(-4+24)$$

$$-6(-2-36) = -48 + 60 + 80 + 228 = \underline{320}$$

# B 1.5

$$\underset{A}{\underset{\shortparallel}{\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}}} \underset{A}{\underset{\shortparallel}{\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}}} = A^2$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & -9 & -11 \\ 0 & 19 & 3 \\ -2 & 0 & 14 \end{bmatrix}$$

---

$$\det A = 2\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(-2-12) + 3(1-4) + (-3-2)$$

$$= -28 - 9 - 5 = \underline{\underline{-42}}$$

$$\det A^2 = \begin{vmatrix} 8 & -9 & -11 \\ 0 & 19 & 3 \\ -2 & 0 & 14 \end{vmatrix} = 8(19 \cdot 14) + 9(6) - 11 \cdot 38 =$$

kalkulator

$$= 2128 + 54 - 418 = \underline{1764}$$

$$(\det A)^2 = (-42)^2 = \underline{1764}$$

1.6

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & a & -21 \\ 3 & 7 & a \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} a & -21 \\ 7 & a \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & -21 \\ 3 & a \end{vmatrix}$$

$$+3 \begin{vmatrix} -1 & a \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = (a^2+147) - 2(-a+63)$$

$$+3(-7-3a) = a^2+2a-9a+147-126-21$$

$$= \underline{a^2-7a}$$

Har gitt
$$x_1+2x_2+3x_3 = 1 \; : \; L_1$$
$$-x_1+ax_2-21x_3 = 2 \; : \; L_2$$
$$3x_1+7x_2+ax_3 = 3 \; : \; L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & a & -21 \\ 3 & 7 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

systemet skrevet som en matrise likning.

<u>N.B.</u> Om $A$ er en $n \times n$ matrise og vi har likningsystem $A\vec{x} = \vec{b}$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$

så har systemet entydig løsning (nøyaktig én løsning) hvis og bare hvis

$\det A \neq 0$

Her må vi altså ha.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & a & -21 \\ 3 & 7 & a \end{vmatrix} = a^2-7a \neq 0$$

dvs. $a(a-7) \neq 0$ dvs. $a \neq 0$ og $a \neq 7$

Løser direkte uten å bruke dette:

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$ : $L_1$

$-x_1 + ax_2 - 21x_3 = 2$ : $L_2$

$3x_1 + 7x_2 + ax_3 = 3$ : $L_3$

$-3L_1 + L_3$ $x_2 + (a-9)x_3 = 0$ ; $E_1$

$L_1 + L_2$ $(a+2)x_2 - 18x_3 = 3$ ; $E_2$

Setter fra $E_1$ $x_2 = (9-a)x_3$

setter inn i $E_2$

$(a+2)(9-a)x_3 - 18x_3 = 3$

$(-a^2 + 7a + 18 - 18)x_3 = 3$

$-(a^2 - 7a)x_3 = 3$ Én løsning;

$x_3 = \frac{-3}{a^2-7a}$ når $a^2 - 7a \neq 0$ dvs.

$a \neq 0$ og $a \neq 7$

$x_2 = (9-a)x_3$ og fra $L_1$

$x_1 = 1 - 2x_2 - 3x_3$ Hvis $a^2 - 7a = 0$

får vi $0 \cdot x_3 = 0 = 3$ umulig ingen løsning.

1.7

a) $\det \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & a & a \\ a & 1 & 1 \\ -a & 1 & a^2 \end{bmatrix}}_{= A} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a^2 \end{vmatrix} - a \begin{vmatrix} a & 1 \\ -a & a^2 \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} a & 1 \\ -a & 1 \end{vmatrix} =$

$= (-1)(a^2-1) - a(a^3+a) + a(a+a)$

$= -a^2+1-a^4-a^2+a^2+a^2 = 1-a^4 = (1-a^2)(1+a^2)$

$\det A = 0$ hvis og bare hvis $a^2=1$ siden $1+a^2 \neq 0$ for alle $a$

b) $L_1: \; -x+ay+az=-1$

$L_2: \; ax+y+z=-1$

$L_3: \; -ax+y+a^2z=-1$

Hvordan avhenger antall løsninger av $a$

$E_1 \; L_2+aL_1 \quad (1+a^2)y+(1+a^2)z=-1-a \quad E_1$

$E_2 \; L_3-aL_1 \quad (1-a^2)y \qquad = -1+a$

Ser straks at om $1-a^2 \neq 0$ dvs. $a \neq 1$ og $a \neq -1$

så blir $y = \dfrac{-1+a}{1-a^2}$ $(E_2)$

$z = \dfrac{-1-a}{1+a^2} - \dfrac{(1+a^2)}{1+a^2}y = \dfrac{-1-a}{1+a^2} - y$

og $x = ay+az+1$ fra $L_1$

dvs. entydig løsning når $a \neq 1$ og $a = -1$

Hvis $a=1$ gir $E_2$

$0 \cdot y = 0$. $E_1$ gir da at

$y = \dfrac{-1-a}{1+a^2} - z$, $x = 1+ay+az$, $L_1$

$z$ kan velges fritt $\infty$ - mange løsninger

Hvis $a=-1$ $E_2$; $(1-a^2)y=-1+a$

gir da $0=-2$ umulig. Ingen løsning.