Oppgave fra seksjon B, 1.8 10/9-2015

x_n, y_n er antall personer i husholdsvis by- og landområder ved tiden t

$$x_{n+1} = x_n + 0.3y_n$$
$$y_{n+1} = 0.1x_n + 0.8y_n$$

a) $x_{n+1} + y_{n+1} = 1.1x_n + 1.1y_n = 1.1(x_n + y_n)$

Siden den totale befolkningen ved tiden $n+1$ er 1.1 multiplisert med den totale befolkningen ved tiden n, vil befolkningen øke med 10% i tidsintervallet $[n, n+1]$

b) Vi ser at

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.3 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$$

Sett $A = \begin{bmatrix} 1 & 0.3 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}$. Vi har da

$$\begin{bmatrix} x_{n+2} \\ x_{n+2} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = A\left(A\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}\right) =$$

$= A^2 \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$. Så $M = A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0.3 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0.3 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}$

$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1.03 & 0.54 \\ 0.18 & 0.67 \end{bmatrix}}}$$

c) Vi skal finne $N = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

slik at $\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = N \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix}$. Dersom MA1001 hadde hatt om å invertere matriser som del av pensum, så ville dere ha lært at N må være den inverse matrisen til matrisen A fra pkt. b)

Siden dette ikke er en del av pensum, må vi istedet finne a, b, c, d slik at

$$\left.\begin{array}{l} a(x_n + 0.3y_n) + b(0.1x_n + 0.8y_n) = x_n \\ c(x_n + 0.3y_n) + d(0.1x_n + 0.8y_n) = y_n \end{array}\right\}$$

ved å løse likningen direkte.

~~Syst~~ a, b, c, d skal være slik at systemet over er oppfylt for alle valg av x_n og y_n.

Vi setter først $x_n = 1$, $y_n = 0$ og får

$$a + 0.1b = 1$$
$$c + 0.1d = 0$$

Setter vi $x_n = 0$ og $y_n = 1$ får vi

$$0.3a + 0.8b = 0$$
$$0.3c + 0.8d = 1$$

Tilsammen har vi systemet

$$\begin{aligned} a + 0.1b &= 1 \\ 0.3a + 0.8b &= 0 \\ c + 0.1d &= 0 \\ 0.3c + 0.8d &= 1 \end{aligned}$$

Dette systemet har utvidet matrise:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.1 & 0 & 0 & 1 \\ 0.3 & 0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.8 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} -0.3R_1 \text{ til} \\ R_2 \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0.1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.77 & 0 & 0 & -0.3 \\ 0 & 0 & 1 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.8 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} -0.3R_3 \\ \text{til } R_4 \end{array} \sim$$

$$\begin{array}{c}\begin{bmatrix} 1 & 0.1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.77 & 0 & 0 & -0.3 \\ 0 & 0 & 1 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.77 & 1 \end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l} \\ \frac{100}{77}R_2 \\ \\ \frac{100}{77}R_4 \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0.1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{30}{77} \\ 0 & 0 & 1 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{100}{77} \end{bmatrix}\begin{array}{l} -0.1R_2 \text{ til } R_1 \\ \\ -0.1R_4 \text{ til } R_3 \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{80}{77} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{30}{77} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{10}{77} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{100}{77} \end{bmatrix}$$

$$\text{Dvs. } N = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{80}{77} & -\frac{30}{77} \\ -\frac{10}{77} & \frac{100}{77} \end{bmatrix}$$