

Snublegruppe 10.11.15

- Plan:
- Oppsummering antiderivasjon (eksemplar!)
 - Tilbakemelding / konster
 - Differensiallikninger (hvis tid)

Oppsummering antiderivasjon

Har $f(x)$.

Vil finne $F(x)$ slik at $F'(x) = f(x)$

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

"Vanlige" regler (s. 261)

- $\int x^r dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C$
- $\int e^x dx = e^x + C$
- $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} \cdot a^x + C$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$
- $\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$
- $\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$

Sjekk
ved å
derivere
svaret

Teknikker:

- Substitusjon: gjentjenne kjerne + kjernen derivert
- delvis integrasjon: produkt
- delbrokoppsettning: rasjonalt uttrykk
" brok

Substitusjon

Når vi gjenkjenner en kjerne og noe som ligner på den deriverte av kjernen.

Eksempler

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \int x^3 \cos(x^4) dx &= \int \cos(x^4) \underbrace{x^3 dx}_{\frac{1}{4} du} \\ &= \int \cos(u) \frac{1}{4} du \\ &= \frac{1}{4} \int \cos(u) du \\ &= \frac{1}{4} \sin(u) + C = \frac{1}{4} \sin(x^4) + C \end{aligned}$$

Substitusjon

$$\begin{aligned} u &= x^4 \\ \frac{du}{dx} &= 4x^3 \\ \frac{1}{4} du &= x^3 dx \end{aligned}$$

Sjekk ved å derivere (kjernesgj!)

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \int 4x^2 e^{x^3} dx &= 4 \int e^{x^3} \underbrace{x^2 dx}_{\frac{1}{3} du} \\ &= 4 \int e^u \frac{1}{3} du = \frac{4}{3} \int e^u du \\ &= \frac{4}{3} e^u + C = \frac{4}{3} e^{x^3} + C \end{aligned}$$

Substitusjon

$$\begin{aligned} u &= x^3 \\ \frac{du}{dx} &= 3x^2 \\ du &= 3x^2 dx \\ \frac{1}{3} du &= x^2 dx \end{aligned}$$

Sjekk

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \int \frac{x^2}{2-3x^3} dx &= \int \frac{1}{2-3x^3} \cdot \underbrace{x^2 dx}_{-\frac{1}{9} du} \\ &= -\frac{1}{9} \int \frac{1}{u} du \\ &= -\frac{1}{9} \ln|u| + C \\ &= -\frac{1}{9} \ln|2-3x^3| + C \end{aligned}$$

Subs.

$$\begin{aligned} u &= 2-3x^3 \\ \frac{du}{dx} &= -9x^2 \\ du &= -9x^2 dx \\ -\frac{1}{9} du &= x^2 dx \end{aligned}$$

Sjekk!

Tilbakemelding:

- Hva har vært bra?
 - Hva kan bli gjort bedre? (aka "hva har vært dårlig?")
 - Hva vil dere snublegruppen skal inneholde fram mot eksamen?
- tempo
 - vanskelighetsgrad
 - forståelighet
- (flere oppgaver, "lekser", kahoot, peppertaker, ...)

Om integralet:

$\int dx$ må ha med begge!
 Begge fjernes når man løser integralet
 (som parentes eller "...")
 Husk: $\frac{du}{dx}$: den deriverte av u med hensyn på x
 du eller dx alene betyr ikke "den deriverte av ...".

Delvis integrasjon

Når vi skal integrere et produkt der vi ikke kan bruke substitusjon.

$$\int u \cdot v' dx = uv - \int u'v dx$$

Velg u og v' slik at u'v blir enklere å integrere.

Eksempler

① $\int x \cdot \cos x dx$

$$= x \cdot \sin x - \int \sin x dx$$

$$= x \cdot \sin x - (-\cos x + C)$$

$$= x \sin x + \cos x + C$$

sjekk

Delvis

$$u = x \quad u' = 1$$

$$v' = \cos x \quad v = \sin x$$

② $\int x \ln(x^2) dx$

$$= \frac{1}{2} x^2 \ln(x^2) - \int \frac{2x}{x^2} \cdot \frac{1}{2} x dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \ln(x^2) - \int x dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \ln(x^2) - \frac{1}{2} x^2 + C$$

(sjekk)

Delvis

$$u = \ln(x^2) \quad u' = \frac{1}{x^2} \cdot 2x$$

$$v' = x \quad v = \frac{1}{2} x^2$$

③ $\int \ln x dx$

$$= \int 1 \cdot \ln x dx$$

$$= x \cdot \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x dx$$

$$= x \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x + C$$

sjekk

Delvis

$$u = \ln x \quad u' = \frac{1}{x}$$

$$v' = 1 \quad v = x$$

Delbrok oppspalting

Når vi skal antiderivere et rasjonalt uttrykk
der vi ikke gjenkjenner kjernen derivert
(neumen) \rightarrow brok

Eksempler

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \int \frac{1}{x(x-1)} dx \\ &= \int \frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1} dx \\ &= -\int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{x-1} dx \\ &= -\ln|x| + \ln|x-1| + C \\ &= \ln|x-1| - \ln|x| + C \\ &= \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + C \end{aligned}$$

Oppspalting

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1) + Bx}{x(x-1)}$$

$$\begin{aligned} 1 &= A(x-1) + Bx = Ax - A + Bx \\ &= x(A+B) - A \end{aligned}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=1 \end{cases}$$

$$\ln a + \ln b = \ln(ab)$$

$$\ln a - \ln b = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

(forkursheftet på nettsidene)