17. november

Plan: · Differensiallikninger (= difflikninger)
· Planen videre

# Difflikninger

= likning med en funksjon $y$
og dens deriverte $y'$ (og $y''$)

Mål: finne funksjonen $y(x)$
som passer i difflikningen

Eks ① $y' - y = 0$

$$y' = y$$

$y(x) = e^x$ passer!

$y(x) = A \cdot e^x$, $A \in \mathbb{R}$ passer!

② $y'' + y = 0$

$$y'' = -y$$

ha med i svaret

Én løsning: $y(x) = A \cdot \cos(x)$

Generell løsning: $y(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$ $A, B \in \mathbb{R}$

Sjekk ved å derivere to ganger

# Første ordens lineære diffligninger

$$\boxed{y' + f(x)\cdot y = g(x)}$$

Obs:
$f(x)$ og $g(x)$ kan være konstante funksjoner: $y' + 2y = 3$

Når du har den på riktig form:

## Metode

1) Finn $F(x)$ (altså slik at $F'(x) = f(x)$)

2) Multipliser med $e^{F(x)}$:

$$\underbrace{e^{F(x)}\cdot y' + e^{F(x)}\cdot f(x)\cdot y}= e^{F(x)}\cdot g(x)$$

3) test ved å derivere

$$(e^{F(x)}\cdot y)' = e^{F(x)}\cdot g(x)$$

4) Antideriverer på begge sider:

$$e^{F(x)}\cdot y = \int e^{F(x)} g(x)\,dx + C$$

5) Løs integralet, del på $e^{F(x)}$ for å få $y(x)$ alene

$$\boxed{y(x) = e^{-F(x)}\cdot\int e^{F(x)} g(x)\,dx + C\cdot e^{-F(x)}}$$

Merk:
Dele på $e^{F(x)}$: $\frac{1}{e^{F(x)}} = e^{-F(x)}$

$$\boxed{\frac{1}{a^n} = a^{-n}}$$

# Eksempler

1) 12.2 a) $y' + 2xy = x$

1: $f(x) = 2x$, så $F(x) = x^2$

$(F'(x) = 2x = f(x))$

2: $e^{x^2} y' + e^{x^2} 2xy = e^{x^2} \cdot x$

3: $(e^{x^2} \cdot y)' = e^{x^2} x$

4: $e^{x^2} \cdot y = \int e^{x^2} x \, dx + C$

5: $= \int e^u \frac{1}{2} du + C$

$= \frac{1}{2} e^{x^2} + C$

Subs:

$u = x^2$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$\frac{1}{2} du = x \, dx$

$e^{x^2} y = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$

$y = \frac{1}{2} e^{x^2} e^{-x^2} + C e^{-x^2}$

$$\underline{\underline{y(x) = \frac{1}{2} + C e^{-x^2}}}$$

Sjekk

Husk

$$\boxed{\begin{aligned} a^m \cdot a^n &= a^{m+n} \\ a^0 &= 1 \end{aligned}}$$

2 $\quad y' = \frac{-2y}{x} + x$

$y' + \frac{2}{x} y = x$

1: $f(x) = \frac{2}{x}, \quad F(x) = 2\ln|x|$

$e^{F(x)} = e^{2\ln|x|} = e^{\ln(x^2)} = x^2$

2: $x^2 \cdot y' + x^2 \cdot \frac{2}{x} y = x^2 \cdot x$

$\vdots$ (prøv videre selv!)

HUSK

$\ln(x^a) = a \cdot \ln(x)$

$e^{\ln(x)} = x$

---

## Separabel difflikning

$$\boxed{p(y) \cdot y' = q(x)}$$

Metode: integrer på begge sider:

$$\int p(y)\underbrace{y'\,dx}_{=dy} = \int q(x)\,dx$$

$$\boxed{\int p(y)\,dy = \int q(x)\,dx}$$

subst:

$y' = \frac{dy}{dx}$

$y'dx = dy$

Eksempler

1 $\quad y' = xy$

$\frac{1}{y} \cdot y' = x$

$\int \frac{1}{y}\,dy = \int x\,dx$

$\ln(y) = \frac{1}{2}x^2 + C$

$\rightarrow y = e^{\frac{1}{2}x^2 + C}$

$\underline{\underline{y(x) = e^{\frac{1}{2}x^2 + C}}} \quad C \in \mathbb{R}$

Sjekk!

2) 12.5 a)

$$y^2 y' = 5x$$

$$\int y^2 \, dy = \int 5x \, dx$$

$$\frac{1}{3} y^3 = \frac{5}{2} x^2 + C$$

$$y^3 = \frac{15}{2} x^2 + C_1$$

$$y(x) = \sqrt[3]{\frac{15}{2} x^2 + C_1} \quad , \quad C_1 \in \mathbb{R}$$

Sjekk

---

Andre ordens lineære

$$\boxed{y'' + p y' + q y = 0}$$

reelle konstanter (tall!)

Merk: - $y = y(x)$, $y' = y'(x)$, $y'' = y''(x)$

- del bort evt. konstanter ganget med $y''$

Metoden $y'' + py' + qy = 0$

gir oss $r^2 + pr + q = 0$ → løs denne med abc-formelen

Denne likningen kan ha

1) To ulike reelle løsninger (røtter) $r_1$ og $r_2$

2) Én reell løsning (rot) $r_1$

3) To komplekse løsninger $r_1$ og $\bar{r}_1$

<u>Tilfelle 1</u> To reelle: $r_1$ og $r_2$

$$\boxed{y(x) = Ce^{r_1 x} + De^{r_2 x}} \qquad C, D \in \mathbb{R}$$

<u>Tilfelle 2</u>: Én reell : $r_1$

$$\boxed{y(x) = Ce^{r_1 x} + Dx\,e^{r_1 x}} \qquad C, D \in \mathbb{R}$$

<u>Tilfelle 3</u>: To komplekse : $r_1$ og $\bar{r}_1$

$$r_1 = \underline{a} + i\underline{b}$$

$$\bar{r}_1 = a - ib$$

$$y(x) = e^{\underline{a}x}\left( C \cdot \cos(\underline{b}x) + D \cdot \sin(\underline{b}x) \right) \qquad C, D \in \mathbb{R}$$