Snublegruppe 27/10

Plan 27/10 Tam

* Etter ønske:
  - "trigonometri" eksempel
  - grenseverdier

  ($(e^x)' = e^x$ i pausen for interesserte)

* Derivasjon
  - gjennom eksempler (oblig relevant?)

* Integrasjon (anti-derivasjon)

03/10 Astri

* Integrasjon (?)
* OBLIG 2 (?)

"Trigonometri" eksempel etter ønske

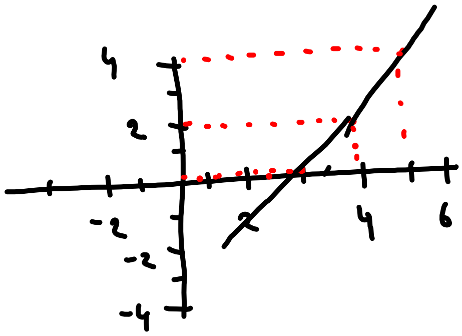
Lineære funksjoner

Kan beskrives ved:

- et punkt
- et stigningstall

Eksempel

Gitt en lineær funksjon med punkt $(x,y)=(4,2)$ og stigningstall 2



Harmoniske svingninger

Kan beskrives ved:

- makspunkt
- minpunkt
- middelverd
- amplitude
- periode
- sirkelfrekvens
- akrofase

se notat 20/10

Eksempel (fra 20/10)

amplitude

$a + b\cos(cx + d)$, $a,b,c,d \in \mathbb{R}$

middelverdi sirkelfrekvens

Periode: $T = \frac{2\pi}{\text{sirkelfrekvens}}$

Akrofase: ..... (se notat 20/10)

Eksempel med tall (oppg. A.10.8 a))

$$F(t) = -4 + \cos(2\pi(t-2))$$
$$= -4 + \cos(2\pi t - 4\pi)$$

maksverdi $= -4 + 1 = \underline{-3}$
minverdi $= -4 - 1 = \underline{\underline{-5}}$
middelverdi: $\underline{-4}$
amplitude $= \underline{1}$
sirkelfrekvens $= \underline{2\pi}$
Periode: $T = \frac{2\pi}{\text{sirkelfrekvens}} = \frac{2\pi}{2\pi} = \underline{1}$

Akrofasen: utgangspunkt $[0, T) = [0, 1)$

$2\pi(t-2) = 0$
$t - 2 = 0$
$t = 2$, $\notin [0,1)$

$t_1 = 2 - 1 = 1$, $\notin [0,1)$

$t_2 = 1 - 1 = 0 \in [0,1)$ $\underline{\underline{\text{ok!}}}$

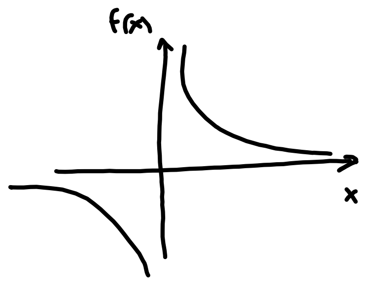
Grenseverdier (etter ønske)

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x)}$$

Vanlig å si: grenseverdien til f(x) når x går mot a

Eksempel

$f(x) = \frac{1}{x}$



Ser på 3 tilfeller:

$\boxed{\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x}}$ Hva skjer med $\frac{1}{x}$ når x vokser?

$\frac{1}{x}$ går mot 0, dvs $\underline{\underline{\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0}}$

$\boxed{\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x}}$ Hva skjer med $\frac{1}{x}$ når x nærmer seg 0 fra venstre?

$\frac{1}{x}$ går mot $-\infty$, dvs $\underline{\underline{\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} \text{ "=" } -\infty}}$

$\boxed{\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x}}$ Hva skjer med $\frac{1}{x}$ når x nærmer seg 0 fra høyre?

$\frac{1}{x}$ går mot ∞, dvs. $\underline{\underline{\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} \text{ "=" } \infty}}$

3 tips:

1) Sjekk alltid grafen til funksjonen på kalkulator, Wolfram etc. hvis mulig
2) Når $\lim_{x \to \infty} f(x)$ og f(x) er en rasjonal funksjon, del uttrykket på x^n, n er høyeste grad i teller og nevner
3) Litt logisk tenkning må ofte til

Eksempel

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{2x^{10} - x^3 + 5x}{x^9}}$$

deler på høyeste "x^n" som er x^{10}

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\underbrace{\frac{2x^{10}}{x^{10}}}_{=2} - \underbrace{\frac{x^3}{x^{10}}}_{=0} + \underbrace{\frac{5x}{x^{10}}}_{=0}}{\underbrace{\frac{x^9}{x^{10}}}_{=0}} \text{ "="} \ \underline{\underline{\infty}}$$

Eksempel

$$\lim_{x\to 0} \underbrace{2x^2}_{=0} + \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Hva skjer med $\frac{1}{x^2}$ når x går mot 0 ?

$\frac{1}{x^2}$ går mot ∞

Hva skjer med $\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$ når $\frac{1}{x^2}$ går mot ∞ ?

$\cos \frac{1}{x}$ vil pendle mellom -1 og 1

dvs. <u>grenseverdien eksisterer ikke</u>

Derivasjon

Regneregler MÅ KUNNE!

① $(a \cdot u)' = a \cdot u'$

② $(u \pm v)' = u' \pm v'$

③ $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

④ $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

⑤ $f'(u(x)) = f'(u) \cdot u'(x)$

a er en konstant
$u = u(x)$
$v = v(x)$

skrivemåter for den deriverte av $f(x)$

$f'(x)$, $\frac{dF}{dx}$, $\frac{d\,F(x)}{dx}$, $D[F(x)]$ $\{f(x)\}'$

oblig 2 ?

Eksempel

$f(x) = \frac{\cos(x)}{4}$

$\frac{dF}{dx} = f'(x) = \underline{\underline{\frac{-\sin x}{4}}}$

$\frac{d^2F}{dx^2} = f''(x) = \underline{\underline{\frac{-\cos x}{4}}}$

OBLIG 2 !?

Eksempler regel ③ $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$f(x) = \overset{u}{x} \cdot \overset{v}{\cos x}$

$\frac{\partial f}{\partial x} = f'(x) = 1 \cdot \cos x + x \cdot (-\sin x)$

$= \cos x - x \sin x$

$f(x) = x^3 \cdot \ln|x|$

$\frac{\partial f}{\partial x} = f'(x) = 3x^2 \cdot \ln|x| + x^3 \cdot \frac{1}{x}$

$= 3x^2 \ln|x| + x^2$

Eksempler regel (4) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$f(x) = \frac{\sin x}{x^4}$ (u, v)

$\frac{\partial f}{\partial x} = f'(x) = \frac{\cos x \cdot x^4 - \sin x \cdot 4x^3}{x^8}$

$= \frac{x \cos x - 4 \sin x}{x^5}$

$f(x) = \frac{\ln|x|}{e^x}$

$\frac{\partial f}{\partial x} = f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot e^x - \ln|x| \cdot e^x}{{e^x}^2}$

$= \frac{\frac{1}{x} - \ln|x|}{e^x}$

$= \left(\frac{1}{x} - \ln|x|\right) e^{-x}$

Husk: $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$

Eksempler regel (5) $\boxed{f'u(x) = f'(u)\cdot u'(x)}$

$$f(x) = \cos^2 x = (\cos(x))^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f'(x) = 2\cos x\cdot(-\sin x)$$

$$= -2\sin x\cos x$$

$$f(x) = \cos^2(x)\cdot\ln(x^2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f'(x) = 2\cos x\cdot(-\sin x)\cdot\ln(x^2) + \cos^2 x\cdot\frac{1}{x^2}\cdot 2x$$

$$= -2\sin x\cos x\ln(x^2) + \frac{2}{x}\cos^2(x)$$

$$f(r(x)) = \frac{1}{r(x)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'(r(x)) = \underbrace{f'(r)}_{\frac{\partial f}{\partial r}}\cdot\underbrace{r'(x)}_{\frac{\partial r}{\partial x}}$$

dette viser at

$f'(u(x)) = f'(u)\cdot u'(x)$

kan skrives som

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}$$

OBLIG 2 ?

Integrasjon (anti-derivasjon)

* Bestemte og ubestemte integraler

$\int_a^b f(x)\,dx$ $\boxed{\int f(x)\,dx}$

* Problemstilling

- Vi har en funksjon f med kjent funksj. uttrykk f(x)
- Vi vet at $F'(x) = f(x)$
- Ønsker å finne alle $F(x)$

Skrivemåte: $F(x) = \int f(x)\,dx$

Det finnes uendelige løsninger for et ubestemt integral

Eksempel

$F'(x)$

$F(x) = x^5$, $f(x) = 5x^4$

$F(x) = x^5 + 1$, $f(x) = 5x^4$

$F(x) = x^5 + 2$, $f(x) = 5x^4$

$\vdots$

Løsningsmengde for $\int 5x^4\,dx$:

$F(x) = x^5 + C$, der C er en konstant