29.09.15

Kap. 5: Tallfølger

〃

en oppramsing av tall $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$

Uendelig: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

Endelig: $\{x_n\}_{n=1}^{m}$

Eks $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$

$\{2n\}_{n=0}^{5} = 2\cdot 0, 2\cdot 1, \ldots, 2\cdot 5$

$= 0, 2, \ldots, 10$

Konvergens: hvis $\lim_{n\to\infty} x_n = a$,

konvergerer følgen $\{x_n\}$ mot a.

Ikke konvergens: følgen divergerer.

Differenslikninger

= en likning som bestemmer hvert ledd i en følge.

Antall ledd man trenger for å definere x_n, kalles differenslikningens orden

Første ordens lineære differenslikninger

Vi kan definere x_{n+1} v.h.a. x_n

Homogene	Inhomogene
$x_{n+1} = r x_n$ eller: $x_{n+1} - r x_n = 0$	$x_{n+1} - r x_n = f(n)$ "noe med n", kan være konstant

Hva er uttrykket for x_n?

Løsningsmetode homogen:

Hvis $x_{n+1} = r\, x_n$,

har vi en generell løsning $x_n = C \cdot r^n$

kan finne C med tilleggs-opplysninger

Eksempler

1) a) $x_{n+1} = -x_n = -1 \cdot x_n$ b) Startverdien er $\underline{2}$

$r = -1$

$$x_n = \underline{\underline{C \cdot (-1)^n}}$$

$x_0 = C \cdot (-1)^0 = C$ $x_2 = C \cdot (-1)^2 = C$

$x_1 = C \cdot (-1)^1 = -C$ $x_3 = C(-1)^3 = -C$

b) $x_0 = 2 \Rightarrow C = 2 \Rightarrow x_n = 2(-1)^n$

Løsningsmetode inhomogene

(les eksemplene i boka)

$$x_{n+1} - r x_n = f(n)$$

der $f(n)$ er et polynom i n av grad k

↓

eks: $f(n) = n^2 + 1$ har $k = 2$

$f(n) = 5n$ har $k=1$

$f(n) = 7$ har $k=0$

Metoden

1) Finn den generelle løsningen $x_n^{h} = Cr^n$ → homogen versjon

(altså løsningen til $x_{n+1} - r x_n = 0$)

2) Finn en spesiell løsning ved å "gjette" på et polynom av grad k:

$$x_n^{s} = A_k n^k + A_{k-1} n^{k-1} + \dots + A_1 n + A_0$$

og regn ut A-ene

3) Legg sammen:

$$\boxed{x_n = x_n^h + x_n^s}$$

Eksempler:

1) $$x_{n+1} - 7x_n = 3$$

1) Homogen versjon:

$$x^h_{n+1} - 7x^h_n = 0$$

$$x^h_{n+1} = 7x^h_n \qquad r = 7$$

$$x^h_n = C \cdot 7^n$$

2) Spesiell løsning:

Her er $f(n) = 3$, så vi gjetter på et poly. av grad null:

$$\{x^s_n\} = A, A, A, A, \ldots$$

Så: $\left.\begin{array}{l} x^s_n = A \\ x^s_{n+1} = A \end{array}\right\}$

$$x^s_{n+1} - 7x^s_n = 3$$
$$A - 7A = 3$$
$$-6A = 3$$
$$A = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

Så $x^s_n = -\frac{1}{2}$

3) Legg sammen: $x_n = x^h_n + x^s_n$

$$= C \cdot 7^n - \frac{1}{2}$$

(Sjekk: $\underline{x_{n+1}} - 7\,\underline{x_n} = 3$

$\underline{C \cdot 7^{n+1} - \frac{1}{2}} - 7\left(\underline{C \cdot 7^n - \frac{1}{2}}\right) = \ldots \overset{\text{vil ha}}{=} 3$)

Kap 7: Komplekse tall og trigonometri

Motivasjon:

- $x^2 + 1 = 0$

$$x^2 = -1$$

$$x = ?$$

- finne løsninger av annengradslikninger

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Løsning: den imaginære enhet i

er slik at $i^2 = -1$

$$i = \sqrt{-1}$$

Et komplekst tall har en imaginær del og en reell del:

$$\boxed{z = a + ib} \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

$$z \in \mathbb{C}$$

Her har $Re(z) = a$

$Im(z) = b$

Eks: 1) $z = 2 + 4i$

$Re(z) = 2$

$Im(z) = 4$

2) $z = 2 - 4i$

$Re(z) = 2$

$Im(z) = -4$

3) $z = 5i - 3$

$Re(z) = -3$

$Im(z) = 5$

Tips: Pass på fortegn og rekkefølge

Regneregler: se boka (s. 149 ?)

Divisjon: $\frac{w}{z}$

Triks: gang oppe og nede med den konjugerte til z for å få reell nevner

Def: konjugerte

Huis $z = a + ib$, er den konjugerte til z lik $\bar{z} = a - ib$

forts. divisjon: $\frac{w}{z} = \frac{w}{z} \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{w \cdot \bar{z}}{z \cdot \bar{z}}$

Eks: $\frac{5+3i}{3-4i} = \frac{(5+3i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}$

$$\frac{(5+3i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{5\cdot 3 + 5\cdot 4i + 3i\cdot 3 + 3i\cdot 4i}{3\cdot 3 + 3\cdot 4i - 4i\cdot 3 - 4i\cdot 4i}$$

$$= \frac{15 + 20i + 9i + 12\cdot i^2}{9 + 12i - 12i - 16i^2} \quad i^2 = -1$$

$$= \frac{15 + 29i - 12}{9 + 16} = \frac{3 + 29i}{25}$$

$$= \frac{3}{25} + \frac{29}{25}i$$

Veien videre: geometrisk tolkning