6. oktober

Rep: Komplekse tall

$$z = a + ib, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

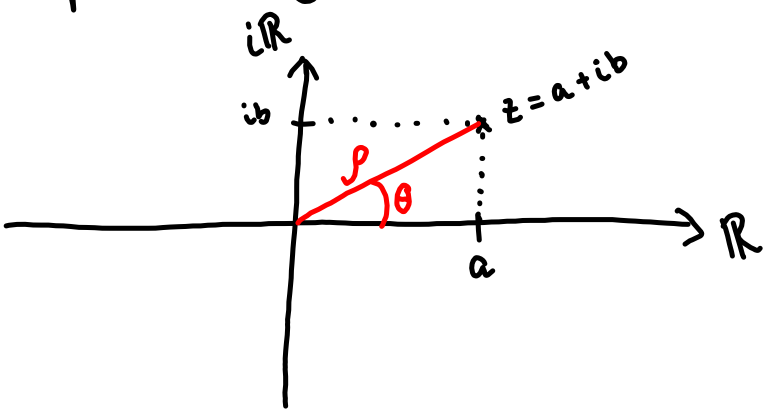
$$z \in \mathbb{C}, \quad Re(z) = a, \quad Im(z) = b$$

Den konjugerte: $\bar{z} = a - ib$

I dag: Geometrisk framstilling

Et komplekst tall har to "deler" a og b.

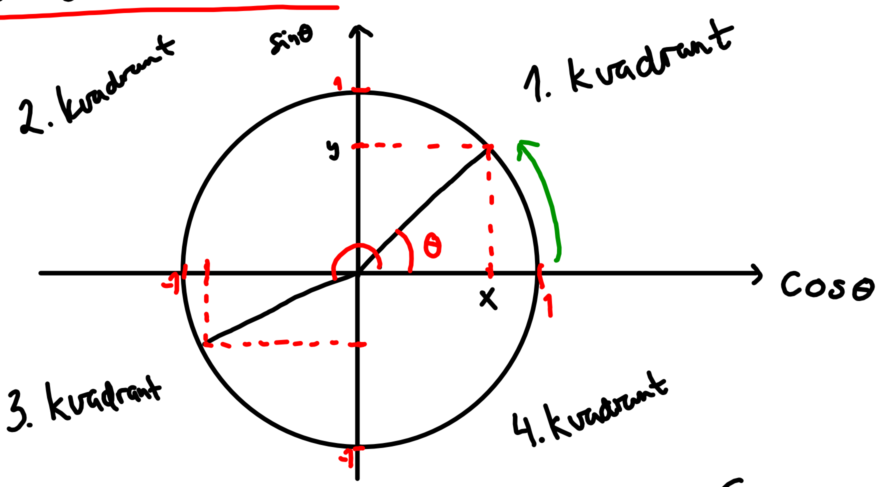
Tenk på a og b som koordinater



Vi ser at vi kan definere z med avstanden fra origo ρ "ro" og vinkelen θ "teta"

Mellomstasjon: Trigonometri (forkurshefte)

Enhetssirkelen - din venn i nøden



$\cos\theta = x$

$\sin\theta = y$

Vinkelen måles i radianer:

$360° = 2\pi$

$180° = \pi$

$90° = \frac{\pi}{2}$

$45° = \frac{\pi}{4}$

$60° = \frac{\pi}{3}$

$30° = \frac{\pi}{6}$

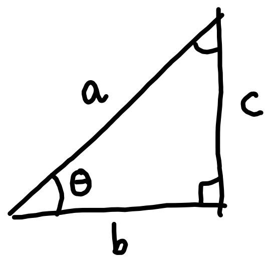
Periodisitet: $4\pi = 2 \cdot 2\pi$

$3\pi = 2\pi + \pi$

$127\pi = 126\pi + \pi$

$= 63 \cdot 2\pi + \pi$

$\cos\theta / \sin\theta$



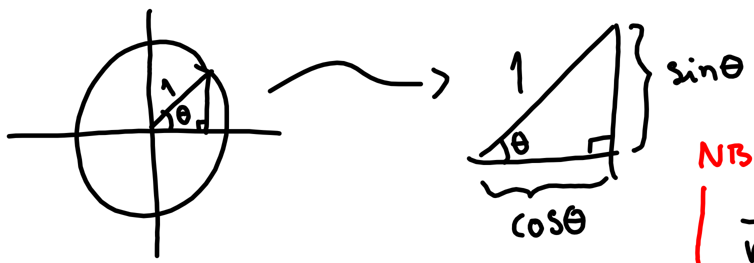
Husk: $a^2 = b^2 + c^2$

$$\cos\theta = \frac{\text{hos}}{\text{hyp}} = \frac{b}{a}$$

$$\sin\theta = \frac{\text{mot}}{\text{hyp}} = \frac{c}{a}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\text{mot}}{\text{hos}} = \frac{c}{b}$$

I enhetssirkelen er radiusen 1

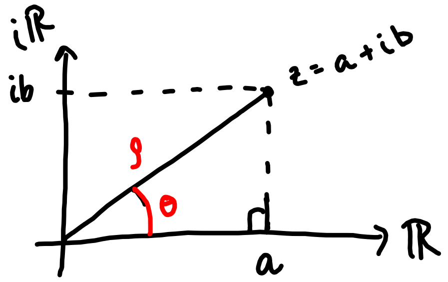


Se tabeller s. 160, 161

NB $\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Tilbake til komplekse tall



$$\cos\theta = \frac{a}{\rho} \Rightarrow a = \rho \cdot \cos\theta$$

$$\sin\theta = \frac{b}{\rho} \Rightarrow b = \rho \cdot \sin\theta$$

$$\boxed{z = a + ib = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)}$$ → POLARFORM

ρ = modulus

θ = argument

Oppg: Skriv om fra normalform $(z = a + ib)$

til polarform $(z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta))$

1) Kladd z i det komplekse planet

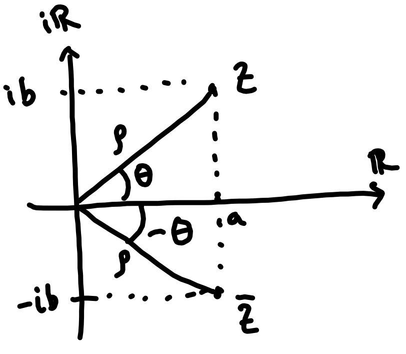
2) $\rho^2 = a^2 + b^2$

$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$

3) Finn $\theta \left(\in [0, 2\pi) \right)$ → fra og med 0 til 2π

v.h.a. $\cos\theta = \frac{a}{\rho}$ og $\sin\theta = \frac{b}{\rho}$

Nyttig:



$z = a + ib$

$\bar{z} = a - ib$

Kompakt polarform / eksponentialform

$$\boxed{z = \rho e^{i\theta}} = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Husk potensregler

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
$a^0 = 1$
$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$

Eks: $\cdot$ $e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i\sin 2\pi$

$= 1 + 0 = 1 = e^0$

---

de Moivres formel:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\cdot\theta) + i\sin(n\cdot\theta)$$

Kap. 8: Andre ordens lineære differenslikning

For å definere x_{n+2} trenger vi x_{n+1} og x_n.

Homogen	Inhomogen
$x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0$ $b, c \in \mathbb{R}$ $c \neq 0$	$x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = f(n)$ $f(n)$ er et gitt uttrykk i n ("noe med n")

Løsningsmetode homogen

$$x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0$$

1) Finn løsningen(e) $\xrightarrow{}$ røtter til

$$r^2 + br + c = 0$$

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

3 mulige utfall:

1: To ulike reelle røtter r_1 og r_2:

$$x_n = C \cdot r_1^n + D \cdot r_2^n, \quad C, D \in \mathbb{R}$$

2: Én reell rot r_1:

$$x_n = C \cdot r_1^n + D \cdot n \cdot r_1^n$$

3: To komplekse røtter r_1 og $\bar{r}_1$

$$x_n = E\, r_1^n + \bar{E}\, \bar{r}_1^n, \quad E \in \mathbb{C}$$