Finne egenverdier og egenvektorer

$M v = \lambda v$

1) Finner egenverdier: $\det\overbrace{(\underbrace{M-\lambda I_3}_{\text{nå: 3x3-matrise}})}^{\text{karakteristisk polynom til } M} = 0$

Når M er en 3x3-matrise: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

Hvis $\det(M - \lambda I) = \overset{(a-\lambda)(b-\lambda)(c-\lambda)}{\cancel{(\lambda-a)(\lambda-b)(\lambda-c)}}$ sorry !!

så vil $\lambda_1 = a, \lambda_2 = b, \lambda_3 = c$

2) Finner tilhørende egenvektorer:

$\lambda_1 = a$: $M v_1 = \lambda_1 v_1$, $v_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$

Sett opp den utvidete matrisen

$\left[\begin{array}{c|c} M - \lambda_1 I & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \end{array}\right]$ og løs med G-J-eliminasjon

F.eks:

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow 0 \cdot z_1 = 0$ $v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ s \end{bmatrix}$, $s \in \mathbb{R}, s \neq 0$

$$\boxed{M^n v = \lambda^n v}$$

Vi vil se på $M^n u$.

Kan skrive u som en lineær-kombinasjon av egenvektorene:

$$u = k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3$$

$$M^n u = M^n (k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3)$$

$$= k_1 \cdot \underbrace{M^n v_1} + k_2 M^n v_2 + k_3 M^n v_3$$

$$= k_1 \overbrace{\lambda_1^n v_1} + k_2 \lambda_2^n v_2 + k_3 \lambda_3^n v_3$$

Likevektsfordeling $\begin{bmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{bmatrix}$ slik at

$$\underbrace{M \begin{bmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{bmatrix}}_{\text{Regn ut}} \underset{\text{krav}}{=} \begin{bmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{bmatrix}$$

Attraktorbassenget til en likevektsfordeling:

alle tilstander $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ som tilslutt (når $n \to \infty$) blir til likevektsfordelingen.

Altså: $\underbrace{M^n \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\text{Regn ut ved}} \xrightarrow{n \to \infty} \begin{bmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{bmatrix}$

å skrive $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ som en lin.komb. av egenvektorene.

Oppgave A: x_n
B: y_n etter n overganger
C: z_n

$$M = \begin{bmatrix} 1{,}3 & -0{,}1 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}8 & 0{,}4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Finn egenverdiene og tilhørende egenvektorer

b) Finn en likevektsfordeling og tilhørende attraktorbasseng.

a) $\det(M - \lambda I) = 0$

$$\det \begin{bmatrix} 1{,}3-\lambda & -0{,}1 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}8-\lambda & 0{,}4 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= (1{,}3-\lambda)\big((0{,}8-\lambda)(1-\lambda) - 0{,}4 \cdot 0\big)$$
$$- (-0{,}1) \cdot 0 + 0{,}2 \cdot 0 = (1{,}3-\lambda)(0{,}8-\lambda)(1-\lambda)$$

Dette skjer når M er diagonal (del 1) og triangulær (del 2)

Egenverdier: $(1{,}3-\lambda)(0{,}8-\lambda)(1-\lambda) = 0$

$$\lambda_1 = 1{,}3, \quad \lambda_2 = 0{,}8, \quad \lambda_3 = 1$$

EGENVEKTORER:

$\lambda_1 = 1{,}3$: $M \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = 1{,}3 \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$

$$M v_1 = 1{,}3 v_1$$

$\left[\begin{array}{c|c} M - \lambda_1 I & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \end{array}\right]$:

$$\begin{bmatrix} 1{,}3-1{,}3 & -0{,}1 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0{,}8-1{,}3 & 0{,}4 & 0 \\ 0 & 0 & 1-1{,}3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0{,}1 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & -0{,}5 & 0{,}4 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} x_1 & y_1 & z_1 & \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccc} 0 & -0{,}1 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & -0{,}5 & 0{,}4 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}3 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \cdot -10 \\ \cdot -2 \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -0{,}8 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}3 & 0 \end{array}\right]$$

1. rad: $y_1 - 2z_1 = 0$
2. rad: $y_1 - 0{,}8z_1 = 0$
3. rad: $-0{,}3z_1 = 0$

Så $z_1 = 0$ (3. rad)
og $y_1 = 0$
$0 \cdot x_1 = 0$, så x_1 kan være hva som helst.

$$v_1 = r\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad r \in \mathbb{R},\ r \neq 0$$

$\underline{\lambda_2 = 0{,}8:}$ $$v_2 = s\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad s \in \mathbb{R},\ s \neq 0$$

$\underline{\lambda_3 = 1:}$ $$v_3 = t\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad t \in \mathbb{R},\ t \neq 0$$
$Mv_3 = v_3$

b) Likevektofordeling: $\begin{bmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{bmatrix}$ slik at

$$M\begin{bmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} Mv_s = \lambda_s v_s \\ Mv_s = 1 \cdot v_s \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1{,}3 & -0{,}1 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}8 & 0{,}4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{bmatrix} \underset{\text{utregning}}{=} \begin{bmatrix} 1{,}3x_s - 0{,}1y_s + 0{,}2z_s \\ 0{,}8y_s + 0{,}4z_s \\ z_s \end{bmatrix} \overset{\text{krav}}{=} \begin{bmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{bmatrix}$$

Dette gir oss likningene
$$1{,}3x_s - 0{,}1y_s + 0{,}2z_s = x_s$$
$$0{,}8y_s + 0{,}4z_s = y_s$$
$$z_s = z_s$$

Får samme matrise som da vi fant v_3 ($\lambda_3 = 1$)

Velger $\begin{bmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Sjekk: Er $\underline{M\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}} = \underline{\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}$?

<u>Attraktorbassenget</u> til likevektofordelingen

$$M^n\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \xrightarrow{n \to \infty} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Metode: skriv $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ som en lin.-komb. av v_1, v_2 og v_3 (velg én av hver)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3$$
$$= k_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + k_3\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} k_1 + k_2 \\ 5k_2 + 2k_3 \\ k_3 \end{bmatrix}$$

Finn k_1, k_2, k_3 uttrykt med x, y, z

1. rad: $x = k_1 + k_2$
2. rad: $y = 5k_2 + 2k_3$
3. rad: $z = k_3$

2: $y = 5k_2 + 2z$
$k_2 = \frac{y - 2z}{5}$

1: $x = k_1 + \frac{y-2z}{5}$
$k_1 = x - \frac{y-2z}{5}$
$= \frac{5x - y + 2z}{5}$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{5}(5x - y + 2z)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{5}(y - 2z)\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$M^n\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = M^n\left(\frac{1}{5}(5x - y + 2z)v_1 + \frac{1}{5}(y - 2z)v_2 + z v_3\right)$$

$$= \frac{1}{5}(5x - y + 2z)\underbrace{M^n v_1}_{\lambda_1^n v_1} + \frac{1}{5}(y - 2z)\underbrace{M^n v_2}_{\lambda_2^n v_2} + z\underbrace{M^n v_3}_{\lambda_3^n v_3}$$

$$= \frac{1}{5}(5x - y + 2z) \cdot 1{,}3^n\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{5}(y - 2z) \cdot 0{,}8^n\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{5}(5x - y + 2z) \cdot 1{,}3^n + \frac{1}{5}(y - 2z) \cdot 0{,}8^n \\ (y - 2z) 0{,}8^n + 2z \\ z \end{bmatrix}} = M^n\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Vi ønsker at denne skal gå mot $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ når $n \to \infty$, så vi må sette krav på x, y og z.

1. rad: $1{,}3^n \to \infty$ når $n \to \infty$
så $5x - y + 2z = 0$

3. rad: $z = 1$
så $5x - y + 2 = 0$

$\left.\begin{array}{l} z = 1 \\ 5x - y + 2 = 0 \end{array}\right\}$ to krav

Krav: $z = 1$

$5x - y + 2 = 0$

$y = 5x + 2$

$x = s, \quad y = 5s + 2$

$$M^n \underline{\begin{bmatrix} s \\ 5s+2 \\ 1 \end{bmatrix}} \xrightarrow{n \to \infty} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$