UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Deleksamen i: MAT1001 — Matematikk 1.

Eksamensdag: Fredag 14. oktober 2016.

Tid for eksamen: 09:00 – 11:00.

Oppgavesettet er på 5 sider.

Vedlegg: Ingen.

Tillatte hjelpemidler: Ett tosidig A4-ark med valgfri tekst, håndskrevet eller trykt, samt godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Kandidatnr. ____________

Oppgavesettet består av 17 flervalgsoppgaver med fem svaralternativ. Svarene avgis i svartabellen nedenfor. Det skal settes kun ett kryss for hver oppgave. Ikke avgitt svar regnes som galt svar og gir 0 poeng, det samme er tilfelle dersom det er satt flere kryss på samme oppgave. Hver oppgave gir 2 poeng for rett svar. Til sammen kan du oppnå 34 poeng. Kun arket med svartabellen skal leveres inn.

Oppgave	Alt. a)	Alt. b)	Alt. c)	Alt. d)	Alt. e)
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11					
12					
13					
14					
15					
16					
17					

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 1. Løs likningssystemet

$$x - 3y = 4$$
$$3x + 2y = 1$$

Vi er ute etter verdien til x.
a) -2 b) -1 c) 0 d) 1 e) 2

Oppgave 2. Et inhomogent lineært likningssystem er gitt ved

$$x_1 - x_2 = 2$$
$$2x_1 + ax_2 = 5$$

hvor a er et reelt tall. Hvilken av følgende verdier for a gir at likningsystemet ikke har noen løsninger?
a) -2 b) -1 c) 0 d) 1 e) 2

Oppgave 3. Vi har gitt to 2×2-matriser

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Differensen $2A - B$ er gitt ved
a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Oppgave 4. Regn ut matriseproduktet

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

a) $[0]$ b) $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ c) Gir ikke mening d) $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ e) $[3]$

Oppgave 5. Determinanten til matrisa

$$M = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

er gitt ved
a) a b)$2a$ c) 0 d) $2a + 1$ e) $a - 2$

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 6. Det karakteristiske polynomet til matrisa

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

er gitt ved
a) $\lambda^2 + 2$ b) $(\lambda - 1)^2$ c) $(\lambda - 1)(\lambda + 1)$ d) $\lambda^2 + \lambda - 2$ e) $\lambda^2 - 2\lambda + 2$

Oppgave 7. Hvilket av følgende tall er en egenverdi for matrisa

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

a) -2 b) -1 c) 0 d) 1 e) 2

Oppgave 8. En av disse vektorene er ***ikke*** egenvektor for matrisa

$$Q = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Oppgave 9. Realdelen til det komplekse tallet $(1 + 2i)(3 - i)$ er
a) 3 b) $3 - i$ c) 5 d) 1 e) tallet selv

Oppgave 10. Produktet $2e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot \frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}$ er lik
a) 0 b) $-i$ c) -1 d) $e^{-\frac{2\pi^2}{9}}$ e) 1

Oppgave 11. Normalformen til det komplekse tallet $z = 2e^{i\frac{4\pi}{3}} - 1$ er gitt ved
a) $2i$ b) $1 + i$ c) $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $2 - i$ e) $-2 - i\sqrt{3}$

Oppgave 12. Polarformen til det komplekse tallet $z = -2 + 2i$ er gitt ved
a) $2e^{i\frac{3\pi}{2}}$ b) $2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ c) $4(-\frac{1}{2} + i\frac{1}{2})$ d) $\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$ e) $8(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2})$

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 13. En første ordens homogen lineær differenslikning er gitt ved

$$x_{n+1} + \frac{1}{2}x_n = 0$$

Da vil x_3 være lik
a) $\frac{1}{8}$ b) $-\frac{1}{8}$ c) 2 d) 0 e) umulig å si når vi ikke kjenner x_0

Oppgave 14. Vi betrakter en første ordens inhomogen differenslikning

$$x_{n+1} + \frac{2}{3}x_n = -1$$

med initialverdi $x_0 = 1$. Da er x_{20} lik
a) $\frac{8}{5}(-\frac{2}{3})^{20} - \frac{3}{5}$ b) $\frac{2}{5}(-\frac{2}{3})^{20} + \frac{3}{5}$ c) $\frac{6}{5}(\frac{2}{3})^{20} - \frac{1}{5}$ d) $(\frac{2}{3})^{20}$ e) $\frac{4}{5}(-\frac{2}{3})^{20} + \frac{1}{5}$

Oppgave 15. Vi betrakter en første ordens inhomogen differenslikning

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}n - 1$$

med initialverdi $x_0 = 1$. Det gir at x_{16} er lik
a) 64 b) 45 c) -63 d) -80 e) 72

Oppgave 16. Vi betrakter en andre ordens homogen differenslikning

$$x_{n+2} + \sqrt{2}x_{n+1} + x_n = 0$$

med initialverdier $x_0 = 1$ og $x_1 = 0$. Det gir at x_{20} er lik
a) $(\frac{\sqrt{2}}{2})^{20}$ b) 0 c) 1 d) $(\sqrt{2})^{20}$ e) -1

Oppgave 17. Vi betrakter en første ordens homogen differenslikning

$$x_{n+1} - \frac{1}{2}x_n = 1$$

Likningen har en konstant løsning (likevektstilstand). Verdien av denne løsningen er
a) -2 b) -1 c) 0 d) 1 e) 2

SLUTT.

(Fortsettes på side 5.)

Noen aktuelle formler

Første ordens homogen differenslikning;

$$x_n - kx_{n-1} = 0 \;\; : \quad x_n = Ck^n$$

Andre ordens homogen differenslikning;

$$x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0, \quad \text{karakteristisk polynom: } r^2 + br + c,$$

$$x_n = \begin{cases} Cr_1^n + Dr_2^n & \text{hvis to reelle røtter } r_1 \neq r_2 \\ Cr^n + Dnr^n & \text{hvis én reell rot } r \\ C\rho^n \cos(n\theta) + D\rho^n \sin(n\theta) & \text{hvis to komplekse røtter } r = \rho e^{\pm i\theta} \end{cases}$$

Komplekse tall:

$$z = a + ib = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}, \quad r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\text{Realdel : } Re(z) = a, \quad \text{Imaginærdel : } Im(z) = b$$

$$\text{Kompleks konjugert : } \overline{z} = a - ib = re^{-i\theta}$$

$$\text{De Moivres formel : } (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Matriseprodukt:

$$(x_{ij}) \cdot (y_{ij}) = (z_{ij}), \quad , z_{ij} = \sum_{k=1}^{n} x_{ik} y_{kj}$$

Determinanter: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1$$

$$\det(AB) = \det(A)\det(B), \quad \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}, \quad \det(A^T) = \det(A)$$

Egenvektor/egenverdi:

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}, \quad \text{karakteristisk polynom: } \det(\lambda I_n - A)$$

Invers matrise: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$