MAT 1001, Høsten 2016

Oblig 1

Innleveringsfrist: Torsdag 22. september kl. 1430

Det er lov til å samarbeide om løsning av oppgavene, men alle skal levere inn sin egen versjon. Husk å skrive på navn og kurskode (MAT 1001). Oppgaven leveres på ekspedisjonskontoret til Matematisk institutt i 7. etg. i Niels Henrik Abels hus innen fristen.

Ved rettingen gis hvert delspørsmål inntil 10 poeng. For å få godkjent må man ha minst 25 poeng på del 1, minst 10 poeng på del 2 og minst 30 poeng på del 3.

Oppgaven dreier seg om et tenkt mengde bestående av tre deler, kalt A, B og C. Innholdet i de tre delene endrer seg stegvis. Gjennom oppgaven skal vi endre oppskriften for hva som skjer i hvert steg. Vi lar x_n være innholdet i A etter n steg, mens y_n og z_n er tilsvarende for B og C. Dynamikken beskrives av regelen

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

der M er overgangsmatrisen som koder dynamikken i systemet, og startfordelingen er

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

Del 1.

Vi begynner med en enkel form for dynamikk, der følgende skjer i hvert steg: Innholdet i A avtar med 20%, innholdet i B øker med 20%, mens innholdet i C er uforandret.

a) Skriv opp M i dette tilfellet.
b) Bestem egenverdiene til M og finn tilhørende egenvektorer.

Vi er interessert i å studere hva som skjer med systemet når vi gjentar den stegvise prosessen mange ganger. For å få en viss indikasjon på hva som skjer kan vi beregne noen potenser av M.

c) Regn ut M^2, M^3, M^4 og M^5. Hva kan du si om M^n når $n \to \infty$ i dette tilfellet?
d) Finn en likevektsfordeling for prosessen, dvs. en fordeling (x_s, y_s, z_s) som er slik at

$$M \cdot \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{pmatrix}$$

La **attraktorbassenget** til likevektsfordelingen (x_s, y_s, z_s) være alle fordelinger (x, y, z) som er slik at

$$M^n \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{pmatrix} \quad \text{når} \quad n \to \infty$$

e) Beskriv attraktorbassenget til likevektsfordelingen (x_s, y_s, z_s) fra punkt d).

Del 2.

I del 1 var det relativt opplagt at innholdet i A vil avta, at innholdet i B vil øke med tiden, mens innholdet i C holder seg konstant. Nå skal vi modifisere dynamikken i systemet for å korrigere for denne ubalansen. Det gjør vi ved at i tillegg til det som ble beskrevet i del 1, så flytter vi i hvert steg 10% av størrelsen til C fra B til A. Det gir oss en ny overgangsmatrise

$$M = \begin{pmatrix} 0.8 & 0 & 0.1 \\ 0 & 1.2 & -0.1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

f) Hva blir egenverdiene og tilhørende egenvektorer for M i dette tilfellet?

g) Finn en likevektsfordeling og det tilhørende attraktorbassenget for matrisen M.

Del 3.

Både i del 1 og del 2 er de aktuelle overgangsmatrisene (øvre) triangulære, i del 1 endog diagonal. Det gjør det veldig enkelt å regne ut egenverdiene, og for så vidt også egenvektorene (som du kanskje oppdaget). I denne siste delen skal vi modifisere systemet videre, slik at vi får en mer komplisert overgangsmatrise. Dette gjør vi ved at i tillegg til beskrivelsen i del 1 og del 2, så skal vi i hvert steg fjerne en andel av innholdet i B og C, tilsvarende 10% av innholdet i A. Samtidig skal vi øke innholdet i A og C tilsvarende 10% av innholdet i B. Dette gir oss overgangsmatrisen

$$M = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ -0.1 & 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 0.1 & 1 \end{pmatrix}$$

h) Regn ut det karakteristiske polynomet til M og bruk dette til å vise at matrisen har egenverdiene $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1.1$ og $\lambda_3 = 0.9$

i) Finn de tilhørende egenvektorene til egenverdiene i oppgave h).

Vi lar startfordelingen være gitt ved

$$s_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

j) Skriv startfordelingen s_0 som en lineær kombinasjon av egenvektorene du fant i oppgave i).

k) Bruk svaret i oppgave k) til å finne $P^n \cdot s_0$, som en funksjon av n.

l) Dersom du har regnet riktig vil du finne at $P^n \cdot s_0$ går mot en bestemt fordeling når $n \to \infty$. Finn denne fordelingen.

m) En liten modifikasjon s_0' av startfordelingen har den konsekvens at $P^n \cdot s_0'$ ikke lenger vil konvergere mot en likevektstilstand. Hva slags modifikasjon snakker vi om?

SLUTT.