Komplekse tall

Utgangspunktet: eksisterer et tall i som er slik at $i^2 = -1$
$\Rightarrow i = \sqrt{-1}$
↳ imaginære enhet

Når vi har innført et slikt tall (i) kan vi se på tall på formen $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$.
Mengden av disse kalles de kompleekse tallene og betegnes med symbolet $\mathbb{C}$.

$z = a + ib$
$= a + bi$,
tallet a kalles realdelen til z, $a = \mathrm{Re}(z)$
tallet b kalles imaginærdelen til z, $b = \mathrm{Im}(z)$

Eksempel

- $z = 2 + 4i$ $\quad a = 2,\ b = 4$
  $\mathrm{Re}\,z = 2,\ \mathrm{Im}\,z = b = 4$
- $z = 2 - 4i = 2 + (-4i)$
  $a = 2,\quad b = -4$

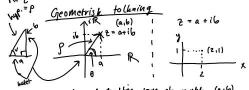
Regneregler se s. 149 i læreboka for detaljer.

Høst '14 ~ oppg. 11

$$z^2 = (a+ib)^2 = (a+ib)(a+ib)$$
$$= a^2 + \overbrace{a(ib)}^{iab} + \overbrace{ib(a)}^{iab} + (ib)^2$$
$$= a^2 + iab + iab + i^2b^2$$
$i^2 = -1$
$$= a^2 + 2iab + (-1)b^2$$
$$= a^2 + 2iab - b^2$$
$$= (a^2 - b^2) + i(2ab)$$

$\mathrm{Re}\,z^2 = a^2 - b^2$

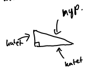
Geometrisk tolkning



$z = a + ib$ kan betraktes som et punkt (a,b) i planet / kan også tolkes som vektoren (a,b).
Vektorer angis med lengde / avstand fra origo og vinkelen vektoren danner med den positive x-aksen.

ρ = 'rho' = lengden til vektoren
θ = 'theta' = vinkelen med x-aksen

Av Pytagoras' setning så har vi:
hypotenus^2 = katet^2 + katet^2



$$\rho^2 = a^2 + b^2$$
$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{hosliggende katet}}{\text{hypotenus}} = \frac{a}{\rho}, \quad \sin\theta = \frac{\text{motstående k.}}{\text{hypotenus}} = \frac{b}{\rho}$$

$\Rightarrow \cos\theta = \frac{a}{\rho} \Rightarrow \underline{a = \cos\theta \cdot \rho}$
$\sin\theta = \frac{b}{\rho} \Rightarrow \underline{b = \sin\theta \cdot \rho}$

$$z = a + ib = (\cos\theta \cdot \rho) + i(\sin\theta \cdot \rho)$$
$$= \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \leftarrow \text{polarformen}$$

En liten teoretisk detalj:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

$$z = a + ib = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$= \rho e^{i\theta}$$
(kompakt) polarform / eksponentialform

Eksempel
Høst '14 ~ 12

$z = -1 + i\sqrt{3}$ på polarform.
Identifisere $a = -1$, $b = \sqrt{3}$
$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$$
θ: $\cos\theta = \frac{a}{\rho} = \frac{-1}{2}$, $\sin\theta = \frac{b}{\rho} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Big\}$ θ? $\theta = \frac{2\pi}{3}$

$$\rho = 2, \quad \theta = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow z = \rho e^{i\theta} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

Differenslikninger

Husker fra kap. 5:
En følge av tall (evt. tallfølge) $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ er en uendelig lang opplistning av tall.

differenslikning = en likning som bestemmer hvert ledd i en følge.
Et ledd er avhengig av en eller flere av de foregående leddene.

Antall ledd man trenger for å definere x_n kaller vi ordenen til differenslikningen.

↳ første ordensdifferenslikn.: x_{n+1} er avhengig av x_n (kun det forrige leddet).

Første ordens lineære differenslikninger

Vi skal se på to typer
- 1. ordens lineære homogene
- 1. ordens lineære inhomogen

Homogen:	Inhomogen
$x_{n+1} = rx_n$	$x_{n+1} - rx_n = f(n)$
$r \in \mathbb{R},\ r \neq 0$	$r \in \mathbb{R},\ r \neq 0$
evt. $x_{n+1} - rx_n = 0$	$f(n)$ er 'noe med n' (kan også være et tall $a \cdot n^0$) $= a$

Mål: hvis vi har en homogen eller inhomogen differenslikning, hva er da en formel for x_n?

Løsningsmetode – homogen

$$x_{n+1} = rx_n$$
$$x_n = Cr^n, \quad C \in \mathbb{R}$$

Eks. 1) $x_{n+1} = -x_n = (-1)\cdot x_n$, identifiserer r, $\boxed{r = -1}$
$\Rightarrow x_n = C(-1)^n$

2) $x_{n+1} = 2x_n$
$\boxed{r = 2}$, $x_n = C \cdot 2^n$

Løsningsmetode – inhomogen

$x_{n+1} - rx_n = f(n)$
↳ polynom av grad k

Eks: $f(n) = n^2 + 1 \leftarrow$ et polynom av grad 2
$f(n) = 5n \leftarrow$ et polynom av grad 1
$f(n) = 7 = 7 \cdot n^0 \leftarrow$ et polynom av grad 0

Metode

1) Finner løsningen til $x_{n+1} - rx_n = 0$ (altså den homogene versjonen)
$x_n^h = Cr^n$.

2) Finner en spesiell løsning, ved å 'gjette' på et polynom av grad k

$x_n^s = A_k n^k + A_{k-1} n^{k-1} + \dots + A_0$

og regn ut A'ene.

3) $x_n = x_n^h + x_n^s$

legger sammen løsningene fra stegene over

Eksempel

$x_{n+1} - 7x_n = 3$

1) Løser først den homogene versjonen

$x_{n+1}^h - 7x_n^h = 0 \Rightarrow x_{n+1}^h = 7x_n^h$, $r=7$

$x_n^h = C \cdot 7^n$

2) Spesiell løsning:

3 er et polynom av grad 0

Gjetter på at $x_n^s = A$ ($\leftarrow$ dette er et polynom av grad 0)

$x_{n+1}^s - 7x_n^s = 3$

$A - 7A = 3 \Rightarrow -6A = 3$

$A = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$

altså er $x_n^s = -\frac{1}{2}$

$x_n = x_n^h + x_n^s = C \cdot 7^n - \frac{1}{2}$

Eksamensoppg. (15 fra H'14)

$x_{n+1} - \frac{1}{2}x_n = 2$

1) x_n^h: løser $x_{n+1}^h - \frac{1}{2}x_n^h = 0$

$x_{n+1}^h = \frac{1}{2}x_n^h \Rightarrow r = \frac{1}{2}$

$x_n^h = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot C$

2) x_n^s: 2 er et polynom av grad 0, gjetter vi $x_n^s = A$

+

$x_{n+1}^s - \frac{1}{2}x_n^s = 2$

$A - \frac{1}{2}A = 2 \Rightarrow \frac{1}{2}A = 2$

$A = 4$

3) $x_n = x_n^h + x_n^s$

$= C\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4$

$x_4 = 8$

$\Rightarrow$ sett inn for $n=4$

$x_4 = C\left(\frac{1}{2}\right)^4 + 4 = 8$

$C\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 8 - 4 = 4$

$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1^4}{2^4} = \frac{1}{16}$

$\frac{C}{16} = 4 \Rightarrow C = 4 \cdot 16 = 64$

$x_n = 64\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4$

$x_0 = 64 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 + 4 = 64 \cdot 1 + 4 = \underline{68}$

Oppg. 16 ~ H'14

$x_{n+1} = 0.9x_n + 10$

1) x_n^h: $x_{n+1}^h - 0.9x_n^h = 0$

$x_{n+1}^h = 0.9x_n^h \Rightarrow r = 0.9$

$x_n = C \cdot (0.9)^n$

2) x_n^s: gjetter på $x_n^s = A$

$x_{n+1}^s - 0.9x_n^s = 10$

$A - 0.9A = 10 \Leftrightarrow 0.1A = 10$

$A = \frac{10}{0.1} = \frac{10}{\frac{1}{10}} = 10 \cdot 10 = 100$

3) $x_n = x_n^h + x_n^s$

$= C(0.9)^n + 100$

$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(C(0.9)^n + 100\right)$

$= \lim_{n\to\infty} C(0.9)^n + \overbrace{\lim_{n\to\infty} 100}^{100}$

$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0, & |a|<1 \\ 1, & a=1 \\ \infty, & |a|>1 \end{cases}$

$\lim_{n\to\infty} C(0.9)^n + 100$

$= C\left(\underbrace{\lim_{n\to\infty} 0.9^n}_{0}\right) + 100$

$\lim_{n\to\infty} 1^n = 1$

$= C \cdot 0 + 100$

$= 100$