Lineære likningssystemer

Definisjon

La $n \in \mathbb{N}$. En lineær likning i n variable er en likning på formen

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

der $a_1, a_2, \dots, b \in \mathbb{R}$ er koeffisientene.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$$

Eksempel $\qquad i = \sqrt{-1}$

1. $\underline{3}x_1 + \underline{\pi}x_2 + \frac{e}{2}x_3 = 10$

2. $\underline{5^2}x_1 + 7\underline{x_2 x_3} = x_4$

3. $x_1^2 + 4x_2 = 0$

Definisjon

La $n \in \underline{\mathbb{N}}$. Et typpel av lengde n $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ er n tall ordnet i rekkefølge. Tallene $\underline{x_i}$ kalles komponenter.

Tenk på et tuppel som et punkt

(i $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ ...)

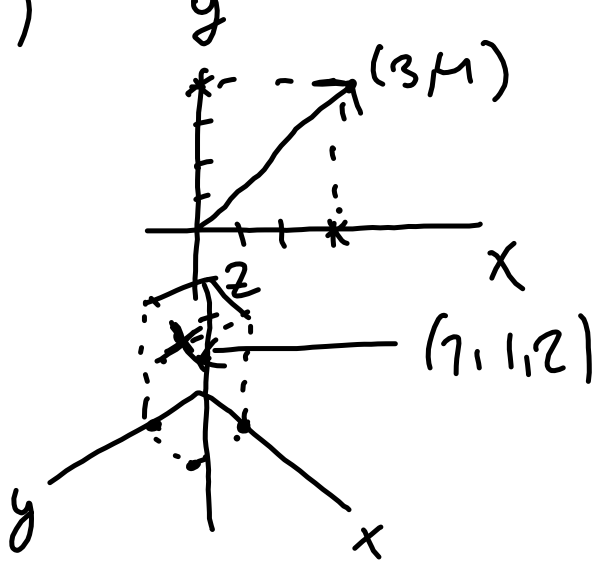
x_1, x_2

o $(3, 4)$

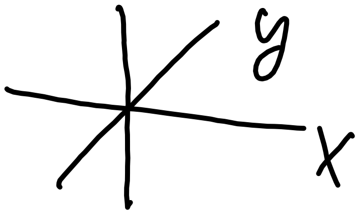
x, y

$x \quad y \quad z$

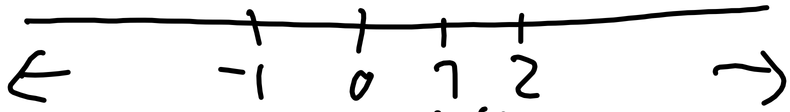
o $(1, 1, 2)$



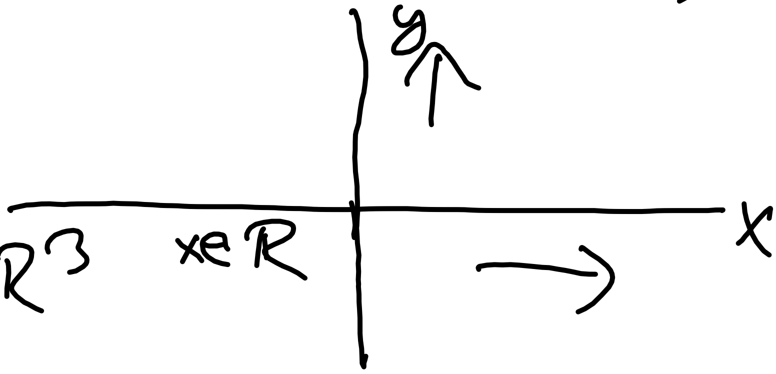
$\mathbb{R}^3$



$\mathbb{R}$



$\mathbb{R}^2$



$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$x \in \mathbb{R}$

Regneoperasjoner på tupler

$\overline{x} = (x_1, \dots, x_n)$
$\overline{y} = (y_1, \dots, y_n)$

- $\overline{x} + \overline{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$
- $a\overline{x} = (ax_1, ax_2, \dots, ax_n)$
- $\overline{x} \cdot \overline{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$

skalarprodukt

tall / $\in \mathbb{R}$

OPPGAVE

$\bar{x} = (2,1,4)$, $\bar{y} = (5,3,2)$

Regn ut

1. $\bar{x} + 2\bar{y}$

2. $\bar{x} \cdot 2\bar{y}$

2. $\bar{x} \cdot 2\bar{y} = \bar{x} \cdot (2(5,3,2))$
$= \bar{x} \cdot (2\cdot5, 2\cdot3, 2\cdot2)$
$= \bar{x} \cdot (10,6,4)$
$= (2,1,4) \cdot (10,6,4)$
$= 2\cdot10 + 1\cdot6 + 4\cdot4$
$= 20 + 6 + 16$
$= \underline{42}$

Løsning:

1. $\bar{x} + 2\bar{y} =$
$(2,1,4) + \underline{2}(5,3,2)$
$= (2,1,4) + (2\cdot5, 2\cdot3, 2\cdot2)$
$= (2,1,4) + (10,6,4)$
$= (2+10, 1+6, 4+4)$
$= (12, 7, 8)$

$\bar{x} = (2,4)$
$\bar{y} = (1,1,2)$
$\underline{\bar{x} + \bar{y}} \stackrel{?}{=}$

Ikke greit! Må være lik lengde

Definisjon

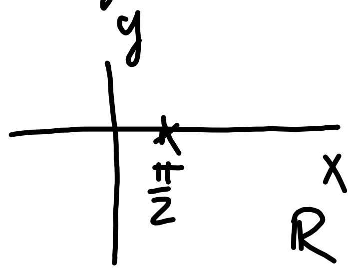
En løsning av en lineær likning i n variable er et n-tuppel. Mengden av alle løsninger kalles løsningsmengden.

Eksempel

Løsningsmengde:

- $2x = \pi$

  Har løsning $x = \frac{\pi}{2}$, $\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$



- $x + y = 4$

løsningene er 2-tupler

$(0,4), (1,3), (2,2), (-1,5) \dots$

Med parameterframstilling så kan vi angi løsningane til likninger med uendelig mange løsninger.

$x+y=4$ $\{(0,4),(1,3),(2,2),(-1,5),\ldots\}$

$\Rightarrow y=4-x$

$\rightarrow$ har parameterframstilling:

$$\boxed{\begin{array}{l} x=s \\ y=4-s \end{array}, \quad s \in \mathbb{R}}$$

$\leftarrow$ Lov til å skrive parameterframstilling en slik, men vi er mest glad i følgende:

$$\boxed{(x,y) \in \{(s,4-s) : s \in \mathbb{R}\}}$$

$$x_1 - x_2 + 5x_3 = 0$$

$$x_1 = x_2 - 5x_3$$

$$x_2 = s$$

$$x_3 = t$$

$$\Rightarrow x_1 = s - 5t$$

$$\Rightarrow (x_1, x_2, x_3) \in \{(s-5t, s, t) : s, t \in \mathbb{R}\}$$

Huskeregel ved parameterfremstilling: én likning med n variable gir $n-1$ parametre

Likningssystemer

Eksempel

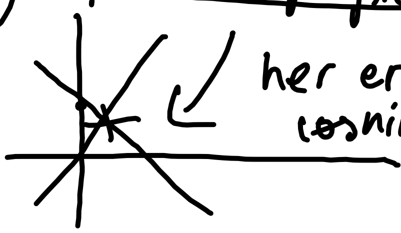
$$\begin{cases} L_1 : -2x + y = 0 \\ L_2 : x + 2y = 5 \end{cases}$$

$L_1 : y = 2x$

$L_2 : 2y = 5 - x$

$y = \frac{5-x}{2} = -\frac{x}{2} + \frac{5}{2}$

Hva er løsningen på likningssystemet?



her er løsningen!

Addisjonsmetoden og substitusjonsmetoden hjelper oss å løse lineære likningssystemer.

Addisjonsmetoden

- forsøker å eliminere en eller flere av variablene ved å multiplisere en av likningene med en passende konstant og legge dette multiplumet til en eller flere av de andre likningene.

$$\begin{cases} L_1: & -2x + y = 0 \\ L_2: & x + 2y = 5 \end{cases}$$

$$2L_2 = 2(x + 2y) = 2x + 4y = 2 \cdot 5 = 10$$

$$\begin{array}{rl} L_1: & -2x + y = 0 \\ +\ 2L_2: & \underline{2x} + 4y = 10 \\ \hline = & 0 + 5y = 10 \end{array}$$

$$y = \frac{10}{5} = 2$$

$$L_1: -2x + 2 = 0$$
$$-2x = -2 \Rightarrow x = 1$$

Løsning blir $\underline{(1,2)}$

$$\begin{cases} L_1: \underline{7x - y = 4} \longleftarrow ax_1 + ax_2 = 6 \\ L_2: \underline{y} = 7x - 4 \longleftarrow ax_1 = ax_2 + 6 \end{cases}$$

Skriver på annen form (rydder opp)

$$\begin{cases} L_1: 7x - y = 4 \\ L_2: \underline{7x - y = 4} \end{cases}$$

$$\begin{array}{rl} & L_1: 7x - y = 4 \\ - & L_2: 7x - y = 4 \\ \hline & 0 + 0 = 0 \\ & 0 = 0 \end{array}$$