Integrasjon (= antiderivasjon)

Fordel med begrepet antiderivasjon er at det er beskrivende:
når vi antideriverer gjør vi det motsatte av å derivere / evt. vi reverserer derivasjonen

$f'(x) = 5x$

Hva er $f(x)$? Altså hva var $f(x)$ før vi derivette?

$$f(x) = \frac{5x^2}{2} \Rightarrow f'(x) = \left(\frac{5x^2}{2}\right)' = 5x$$

altså er $f(x) = \frac{5x^2}{2}$ en antiderivert til $f'(x) = 5x$

Helt generelt har vi:

$\boxed{\text{En antiderivert til en funksjon } f(x) \text{ er en funksjon } F(x) \text{ slik at } F'(x) = f(x)}$

Vi fant ut at $F(x) = \frac{5x^2}{2}$ er en antiderivert til $f(x) = 5x$. $G(x) = \frac{5x^2}{2} + 3 \Rightarrow$

$G'(x) = \left(\frac{5x^2}{2} + 3\right)' = 5x + 0 = 5x$

altså er også $G(x)$ en antidert.

Vi har faktisk at $G(x) = \frac{5x^2}{2} + C$, $C \in \mathbb{R}$ alle er antideriverte til $f(x) = 5x$.

Altså har $f(x) = 5x$ har uendelig mange antideriverte.

Generelt har vi:

De antideriverte til en funksjon f er funksjonene gitt ved $F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$ der F er en antiderivert til f

Vi skriver

$$\int f(x)\,dx$$

for den generelle antideriverte til f.

Vi har altså

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Tilbake til eksempelet over:

$$\int 5x\,dx = \frac{5x^2}{2} + C$$

Et par begreper:

- '$\int f(x)\,dx$' kalles den generelle antideriverte til $f(x)$
- konstanten C kalles integrasjonskonstanten
- Symbolet dx kalles differensialet til x. Dette symbolet uttrykker at vi integrerer med hensyn på x. Evt. $\int f(t)\,dt$ ← da integrerer man med hensyn på t

Vi har introdusert begrepet antiderivasjon (integrasjon) og innført noen begreper. Men enda ikke sett noe på hvordan vi faktisk integrerer, altså regner ut $\int f(x)\,dx$.

Siden det er vanskelig å 'derivere baklengs', har vi regneregler vi kan bruke når vi integrerer.

$$\int \overbrace{x^n}^{\text{integrand}} dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

Vi deriverer høyresiden og kontroller at vi får integranden:

$$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right)' = \frac{\cancel{(n+1)}x^{(n+1)-1}}{\cancel{n+1}}$$
$$= x^n$$

- Lurt å derivere svaret du får når du integrerer for å sjekke at du har integrert riktig.

Resten av timen skal vi se på følgende teknikker (triks) man kan bruke når man integrerer:

substitusjon, delvis integrasjon og delbrøksoppspaltning

Substitusjon

$$\left[\int a f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx\right]$$

Eksempel:

Ønsker å regne $\int 3\sin(3x)\,dx$

$$= 3\int \sin(3x)\,dx$$

OBS! Kan ikke bruke formelarket direkte, vi har kjerne $3x$.

$u = 3x$ (altså substituerer vi $3x$ med u)

$3\int \sin u\,dx$ ← Må passe på at vi har riktig differensial. Kan ikke integrere en funksjon av u med hensyn på x.

Bruker følgende triks:

$u = u(x) = 3x$

$\Rightarrow u'(x) = (3x)' = 3$

Husker at $u'(x) = \frac{du}{dx} = 3 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3$

Ønsker å uttrykke dx ved du og 3.

$du = 3dx \Rightarrow \frac{du}{3} = dx$

$u = 3x$, $dx = \frac{du}{3}$

$$\int 3\sin(3x)\,dx = \int 3\sin u \frac{du}{3}$$
$$= \int \sin u \frac{\cancel{3}}{\cancel{3}}\,du$$
$$= \int \sin u\,du$$
$$= -\cos u + C$$

substituere tilbake $u = 3x$

$$= -\cos 3x + C$$

Eksempel

$\int \frac{1}{3x+2}\,dx$, Skulle ønske vi hadde x i nevner og ikke $3x+2$, da hadde vi kunnet bruke $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C$

(evt. $\int \frac{1}{|x|}\,dx = \ln|x| + C$)

Derfor substituerer vi $u = 3x+2$

$u'(x) = \frac{du}{dx} = (3x+2)'$
$= 3$

$\frac{du}{dx} = 3 \Rightarrow du = 3dx \Rightarrow \frac{du}{3} = dx$

$$\int \frac{1}{3x+2}\,dx \overset{u = 3x+2,\ dx = \frac{du}{3}}{=} \int \frac{1}{u}\frac{du}{3} = \int \frac{1}{u}\frac{1}{3}\cdot du$$

$$\frac{1}{3}\boxed{\int \frac{1}{u}\,du} = \frac{1}{3}(\ln u + C),\quad u > 0$$

$\int \frac{1}{u}\,du = \ln u + C$

$$= \frac{1}{3}\ln u + \frac{1}{3}C$$

$$= \frac{1}{3}\ln u + C,\quad C = \frac{1}{3}C$$

substituerer tilbake

$$= \frac{1}{3}\ln(3x+2) + C,\quad 3x+2>0$$

$3x + 2 > 0 \iff 3x > -2$ (flytter over 2, endrer fortegn)

$\iff x > -\frac{2}{3}$ (deler med 3 på begge sider)

$$\int \frac{1}{3x+2}\,dx = \frac{1}{3}\ln(3x+2) + C,\quad x > -\frac{2}{3}$$

Delvis integrasjon

'Standardeksempel':

$\int xe^x\,dx$

$\neq$

OBS: $\left(\int x\,dx\right)\left(\int e^x\,dx\right)$

Regel angitt med en formel:

$$\boxed{\int uv'\,dx = uv - \int u'v\,dx}$$

Forsøker å bruke delvis integrasjonen.

Velger $\boxed{\begin{array}{l} u = x,\quad v' = e^x \\ u' = 1,\quad v = \int v'\,dx = \int e^x\,dx = e^x \end{array}}$

$$\int xe^x\,dx = \overbrace{xe^x}^{u\cdot v} - \overbrace{\int 1\cdot e^x\,dx}^{\int u'v\,dx}$$

$$= xe^x - \int e^x\,dx$$

$$= xe^x - e^x + C$$

$$= (x-1)e^x + C$$

Hva med å velge $u = e^x$, $v' = x$? (det er også en mulighet)

$u = e^x \Rightarrow u' = e^x$

$v' = x \Rightarrow v = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}$ ($+C$, velger $C=0$)

$$\boxed{\int uv'\,dx = uv - \int u'v\,dx}$$

Setter inn i formel:

$$\int xe^x\,dx = e^x\frac{x^2}{2} - \underbrace{\int e^x\frac{x^2}{2}\,dx}_{\text{dette integralet er mer vanskelig å løse enn det opprinnelige}}$$

Må altså velge u, v' slik at

$u'v$ er enklere å integrere enn uv'

Tilfelle 1

Valgte $u = x$, $v' = e^x$

$\Rightarrow u' = 1$, $v = e^x$

Lurt siden $\int u'v\,dx = \int e^x\,dx$

$= e^x$ ← enkelt.

Tilfelle 2

Valgte $u = e^x$, $v' = x$

$u' = e^x$, $v = \frac{x^2}{2}$

Ikke lurt, siden $\int u'v\,dx = \int e^x\frac{x^2}{2}\,dx$

- vanskelig!

Delbrøksoppspaltning

$$\int \frac{1}{x(x-3)}\,dx$$

Hva hvis det finnes $A, B \in \mathbb{R}$ slik at:

$$\frac{1}{x(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3}\ ?$$

Setter opp likningen ↑

Multipliserer begge sider med $x(x-3)$

$$\frac{1}{x(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} \quad \Big|\ x(x-3)$$

$$1 = A(x-3) + Bx$$

$$1 = Ax - 3A + Bx$$

$$= (A+B)x - 3A$$

$\Rightarrow A + B = 0 \Rightarrow A = -B$

$-3A = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{3}$

$\Rightarrow B = \frac{1}{3}$

$$\frac{1}{x(3-x)} = -\frac{1}{3x} + \frac{1}{3(x-3)}$$

$$\int \frac{1}{x(3-x)}\,dx = \int\left(-\frac{1}{3x} + \frac{1}{3(x-3)}\right)dx$$

$$= \int -\frac{1}{3x}\,dx + \int \frac{1}{3(x-3)}\,dx$$

$$= -\frac{1}{3}\int \frac{1}{x}\,dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-3}\,dx$$

$$= -\frac{1}{3}\ln x + \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-3}\,dx$$

Mellomregning: må bruke subst. på $\int \frac{1}{x-3}\,dx$:

$u = x-3 \Rightarrow u' = (x-3)' = 1$

$\Rightarrow \frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow du = dx$, $\int \frac{1}{x-3}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du$

$= \ln u + C$

$= \ln(x-3) + C$

$$= -\frac{1}{3}\ln x + \frac{1}{3}(\ln(x-3) + C)$$

$$= -\frac{1}{3}\ln x + \frac{1}{3}\ln(x-3) + \frac{1}{3}C$$

$$= -\frac{1}{3}\ln x + \frac{1}{3}\ln(x-3) + C$$