forts. fra forrige gang: Separable diff. likn.

Husk: disse likn. er på formen

$$p(y)y' = q(x)$$

der p, q er kjente funksjoner.

Eksempel

$$y' + y = 2xy$$

$\Updownarrow$ deler med y

$$\frac{y' + y}{y} = 2x$$

$$\frac{y'}{y} + 1 = 2x$$

$$\frac{y'}{y} = 2x - 1$$

Obs! Når vi deler med y, antar vi at $y \neq 0$. Vi 'mister' løsning en $y = 0$, og må huske på det til senere

$$\int \frac{y'}{y}\,dx = \int 2x - 1\,dx$$

$$y(x) = y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y'(x) \Rightarrow dy = y'(x)dx \Rightarrow dx = \frac{dy}{y'(x)}$$

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)}\,dx = \int \frac{\cancel{y'(x)}}{y(x)} \frac{dy}{\cancel{y'(x)}} = \int \frac{1}{y(x)}\,dy$$

$$= \int \frac{1}{y}\,dy = \ln|y|$$

(Merk: dersom vi skriver $\int \frac{1}{y}\,dy = \ln y$ Så mister vi løsningene $y \leq 0$, altså funksjonen $y(x)$ slik at $y(x) \leq 0$, for en eller annen x)

$$\ln|y| = \int 2x - 1\,dx = \int 2x\,dx - \int 1\,dx$$

$$= \cancel{2}\frac{x^2}{\cancel{2}} - x + C$$

$$= x^2 - x + C$$

$$|y| = e^{\ln|y|} = e^{x^2 - x + C}$$

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

$$y = \pm e^{x^2 - x + C}$$

$= \pm e^{x^2 - x} e^C$, husk at: $e^{a+b} = e^a e^b$

$$= e^{x^2 - x}(\pm e^C)$$

$= D e^{x^2 - x}$, $D = \pm e^C$

Husker på løsningen vi mistet $(y = 0)$.
Observerer at for $D = 0$ så er $y = 0$ en løsning.

Moral:

- når vi deler med y mister vi løsningen $y = 0$. OK, så lenge vi husker på å ta med den tilslutt.
- integrerer $\int \frac{1}{y}\,dy = \ln y$ mister vi alle $y \leq 0$. Bruker istedet $\int \frac{1}{y}\,dy = \ln|y|$.

Annenordens diff. likn.

Definisjon En andreordens homogen diff likning er en likning på formen

$$y'' + py' + qy = 0$$

der p, q konstanter og $y = y(x)$ er en funksjon.

Merk: i Mat1001 ser vi kun på homogene annenordens diff. likn.) altså vil vi alltid ha 0 på høyresiden.

Løsningsmetoden

Tilsvarende metode som da vi løste annenordens differenslikninger.

Løsningsmetode for difflikningen

$$y'' + py' + qy = 0:$$

Difflikningen gir opphav til en karakterisk likning

$$r^2 + pr + q = 0 \quad (*)$$

Husk at $r = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$, diskriminant $= p^2 - 4q$

Løsningen til $(*)$ vil avhenge av løsningene til den karakteristiske likningen. Vi har tre følgende tilfeller.

1. to reelle røtter r_1, r_2 $(p^2 - 4q > 0)$:

   $y(x) = Ce^{r_1 x} + De^{r_2 x}$, $C, D \in \mathbb{R}$

2. én reell rot r $(p^2 - 4q = 0)$:

   $y(x) = Ce^{rx} + Dxe^{rx}$, $C, D \in \mathbb{R}$

3. to komplekse røtter r_1, r_2 $(p^2 - 4q < 0)$:

   (husk: $r_2 = \bar{r}_1$): $r_1 = a + ib$

   $y(x) = e^{ax}(C\cos(bx) + D\sin(bx))$
   $C, D \in \mathbb{R}$

Eksempel

$$y'' + 4y' + 85y = 0$$

$$r^2 + 4r + 85 = 0$$

$ax^2 + bx + c = 0$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$a = 1, b = 4, c = 85$

$$r = \frac{-4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 85}}{2}$$

$16 = 4^2$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 85}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 85}}{2}$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{4(4 - 85)}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4(-81)}}{2}$$

$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{4}\sqrt{-81}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{-81}}{2}$$

$-81 = (-1) \cdot 9^2$

$$= \frac{-4}{2} \pm \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}\sqrt{-81} = -2 \pm \sqrt{(-1) \cdot 9^2}$$

$$= -2 \pm \sqrt{(-1)}\sqrt{9^2}$$

$$= -2 \pm i9$$

H11, 1:

$L_1: \quad x+y+z=0$

$L_2: \quad 2x-y+2z=3$, vi trenger koeffisient-matrisen til likningssystemet.

$L_3: \quad 2x+y+dz=1$

Husker hvordan vi finner koeffisientmatrisen:

likningssystemet $\Leftrightarrow$

$L_1: \quad 1\cdot x + 1\cdot y + 1\cdot z = 0$

$L_2: \quad 2\cdot x + (-1)\cdot y + 2\cdot z = 3$

$L_3: \quad 2\cdot x + 1\cdot y + d\cdot z = 1$

$$\begin{array}{c} \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & d \end{bmatrix} \end{array} ,$$

Resultatet vi trenger:

et likningssystem har uendelig mange eller ingen løsninger

$\Leftrightarrow \det A = 0$,

A er koeffisientmatrisen

Husk at dette resultatet står ikke på formelarket!

$$\det A = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & d \end{pmatrix} = 1\left|\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & d \end{pmatrix}\right| - 1\left|\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & d \end{pmatrix}\right|$$

$$+ 1\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1(-d-2) - 1(2d-4)$$

$$+ 1\cdot(2+2) = -d-2-2d+4+4$$

$$= -3d+6$$

$$\det A = 0 \Leftrightarrow -3d+6=0$$

$$-3d=-6$$

$$d=2$$

$\Rightarrow$ For $d=2$ har vi enten uendelig mange eller ingen løsninger.

For å finne løsningene i tilfellet $d=2$, setter vi $d=2$ inn og løser med GJE.

Setter inn for $d=2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} -2L_1+L_2 \\ -2L_1+L_3 \\ \sim \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \frac{L_2}{-3}, \\ -1\cdot L_2 \\ \sim \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \overset{L_3-L_2}{\sim} \begin{array}{c} \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \Leftrightarrow$$

$x+y+z=0 \quad \Rightarrow \quad z = -x-y$

$y=-1 \qquad\qquad = -x+1$

$\qquad\qquad\qquad = 1-x$

$(x,y,z) = (x, -1, 1-x)$

Parameterfremstilling:

$x+y+z=0$, $z = -x-y = -x+1$

$y=-1 \qquad\qquad = 1-x$

Velger x som parameter, $x=t$

$z = 1-t$

$(x,y,z) = (t, -1, 1-t)$

H13, 3a)

Trigonometrisk omskrivning:

Bruker formel:

$$C\cos(bx) + D\sin(bx) = A\cos(bx-\phi)$$

$A = \sqrt{C^2+D^2}$, ϕ er vinkelen i $[0, 2\pi)$

gitt ved:

$$\cos\phi = \frac{C}{A}, \quad \sin\phi = \frac{D}{A}$$

Obs! Står ikke på formelarket.

Vårt uttrykk:

$$\sqrt{3}\sin\left(\tfrac{1}{3}t\right) + \cos\left(\tfrac{1}{3}t\right)$$

identifiserer C, D, b: $D = \sqrt{3}$, $b = \frac{1}{3}$

$C = 1$

$$A = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\phi: \quad \cos\phi = \frac{C}{A} = \frac{1}{2}, \quad \sin\phi = \frac{D}{A} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\phi = \frac{\pi}{3}$$

$$\sqrt{3}\sin\left(\tfrac{1}{3}t\right) + \cos\left(\tfrac{1}{3}t\right) = 2\cos\left(\tfrac{1}{3}t - \tfrac{\pi}{3}\right)$$