• <u>Mer om likningssystemer</u>

La oss si man får en oppgave på formen:

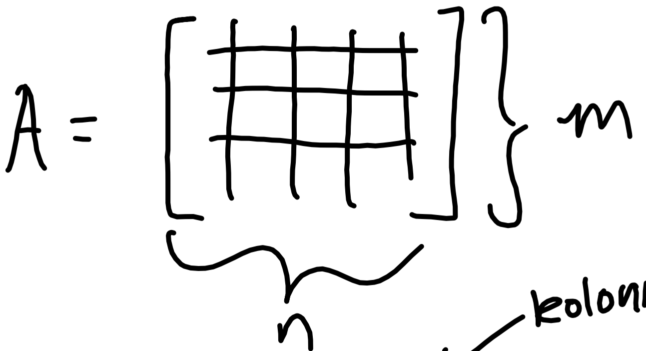
løs likningen

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$$

- forsøke å finne en eksakt løsning
  → bortkastet tid
- gå rett på å finne parameterfremstillingen

Vi skal se på et par tommelfingerregler som du kan bruke for å danne deg en forventning om hvor mange løsninger likningen(e) dine har.

Matriser



kolonner

A er en $m \times n$ matrise

rader

Hva kan vi gjøre med matriser?

addisjon NB! matrisene må ha lik størrelse

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix},\ A + B = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{1} \\ \underline{2} & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{2} & \underline{4} \\ \underline{6} & \underline{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+2 & 1+4 \\ 2+6 & 3+8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 11 \end{bmatrix}$$

Multiplikasjon med konstant

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad 3A = 3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot 2 \\ 3\cdot 3 & 3\cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$$

Matrisemultiplikasjon

To matriser kan multipliseres hvis størrelsene er følgende:

$$m \times \underbrace{n} \quad \underbrace{n} \times q$$

like, spesifikt: antall kollonner i A må være lik antall rader i B for at AB skal være en tillatt operasjon

I dette tilfellet vil AB ha størrelse $m \times q$.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, tillatt? $2\times\underline{2} \cdot \underline{2}\times 2$

2x2 2x2 like! så ok.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1\cdot 0 + 2\cdot 2) & (1\cdot 1 + 2\cdot 3) \\ (3\cdot 0 + 4\cdot 2) & (3\cdot 1 + 4\cdot 3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (0+4) & (1+6) \\ (0+8) & (3+12) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 8 & 15 \end{bmatrix}$$

$3\cdot 2 = 2\cdot 3$ ← rekkefølge spiller ingen rolle

$AB \neq BA$ ← rekkefølgen er viktig

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (0\cdot 1 + 3\cdot 1) & (0\cdot 2 + 1\cdot 4) \\ \underline{(2\cdot 1 + 3\cdot 3)} & (2\cdot 2 + 3\cdot 4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 11 & 16 \end{bmatrix}$$

Determinanter (til en kvadratisk matrise)

↓

like mange rader som kolonner

Determinanten til en matrise er et tall ($\in \mathbb{R}$) vi kan regne ut med komponentene i matrisen.

Vi bruker notasjone det A for å angi determinanten til matrisen A.

2x2

La A være matrisen $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Da er determinanten

$$\det A = a \cdot d - b \cdot c$$

Eksempel

1) $\det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = \underline{3}$

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = 4(-2) - 5 \cdot 1$$

$$= -8 - 5 = \underline{-13}$$

<u>3x3-matriser:</u>

Finne determinanten til $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

$$2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$2(\overset{12}{2 \cdot 6} - \overset{15}{5 \cdot 3}) - 2(\overset{6}{1 \cdot 6} - \overset{12}{3 \cdot 4}) + 2(\overset{5}{1 \cdot 5} - \overset{8}{4 \cdot 2}) =$$

$$2(-3) - 2(-6) + 2(-3) = -6 + 12 - 6 = \underline{0}$$

Et lineært likningssystem har enten

- Én (unik) løsning
- uendelig mange løsninger
- ingen løsninger

Hvor mange løsninger likningssystemet har avhenger av forholdet mellom antall likninger og antall variable.

1. flere variabler enn likninger

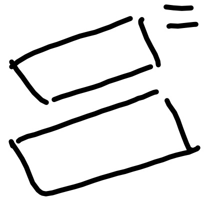
her har vi to muligheter:
1. uendelig mange løsninger
2. ingen

- har uendelig mange løsninger:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$$

- ingen løsninger:

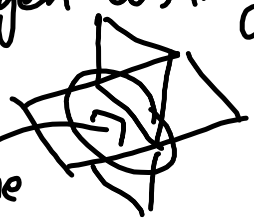
$$\begin{cases} L_1: x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ L_2: x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow L_1 \text{ og } L_2 \text{ er plan i } \mathbb{R}^3$$



$\Rightarrow$ ser at vi ikke har noen løsning

$$\begin{aligned} L_1&: x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ -L_2&: x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ \hline &= \quad 0 = -1 \end{aligned} \Rightarrow \text{ingen løsning}$$

to plan som ikke er parallelle:



2. <u>like mange likninger som variable</u>

her kan vi ha: $\begin{cases} \text{en løsning} \\ \text{uendelig mange} \\ \text{ingen} \end{cases}$

én løsning:

$$\begin{cases} L_1: x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \\ L_2: -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ L_3: \underline{3x_1} - 7x_2 + 4x_3 = 10 \end{cases}$$

Bruker addisjonsmetoden:

- bruke L_1 for å fjerne x_1 fra L_2 og L_3:

$$\begin{array}{rl} L_1: & x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \\ + L_2: & -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ \hline = & 0 - x_2 + 5x_3 = 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} -3L_1: & -3x_1 - 3x_2 - 6x_3 = -24 \\ + L_3: & 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 10 \\ \hline = & 0 - 10x_2 - 2x_3 = -14 \end{array}$$

$$\begin{cases} L_1: x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \\ L_2': -x_2 + 5x_3 = 9 \\ L_3': -10x_2 - 2x_3 = -14 \end{cases}$$

Bruker L_2' for å fjerne x_2 fra L_3':

$$\begin{array}{rl} -10L_2': & 10x_2 - 50x_3 = -90 \\ + L_3': & -10x_2 - 2x_3 = -14 \\ \hline = & 0 - 52x_3 = -104 \end{array}$$

$$\Rightarrow x_3 = \frac{-104}{-52} = 2$$

$x_3 = 2$. Setter x_3 inn i L_2': $-x_2 + 5x_3 = 9$

$$-x_2 + 5(2) = 9$$

$$-x_2 = 9 - 10 = -1$$

$$x_2 =$$

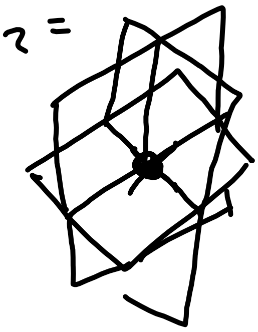
Setter x_3, x_2 inn i L_1: $x_1 + x_2 + 2x_3 = 8$

$$x_1 + 1 + 2(2) = 8$$

$$x_1 = 8 - 1 - 4$$

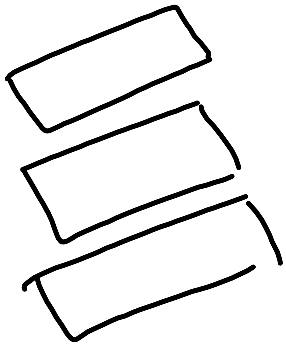
$$= 3$$

$$\Rightarrow (x_1, x_2, x_3) = (3, 1, 2)$$



ingen løsning:

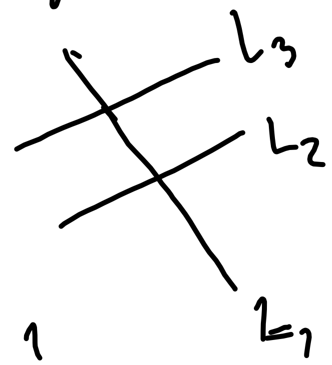
$$\begin{cases} L_1: x + y + z = 1 \\ L_2: x + y + z = 2 \\ L_3: x + y + z = 3 \end{cases}$$



3. flere likninger enn variable (overbestemt)

vi kan ha:
- ingen
- én
- uendelig mange

løsninger



• ingen løsning

$$\begin{cases} L_1: & 2x+3y=-2 \\ L_2: & 2x+y=1 \\ L_3: & 3x+2y=1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rl} L_1: & 2x+3y=-2 \\ -L_2: & 2x+y=1 \\ \hline = & 0+2y=-3 \end{array}$$

$$y=-\frac{3}{2}$$

Setter inn i L_2 for å finne x:

$$2x+y=2x+\left(-\frac{3}{2}\right)=1 \Rightarrow 2x=1+\frac{3}{2}=\frac{2}{2}+\frac{3}{2}=\frac{2+3}{2}=\frac{5}{2} \Rightarrow x=\frac{5}{4}$$

Setter inn i L_3 for å sjekke om dette stemmer for L_3:

$$3\left(\frac{5}{4}\right)+2\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{3\cdot5}{4}+\left(\frac{-2\cdot3}{2}\right)=\frac{15}{4}+\frac{(-6)}{2}=\frac{15}{4}+\frac{(-12)}{4}=\frac{15-12}{4}=\frac{3}{4}$$

$\frac{3}{4}\neq 1 \Rightarrow$ ingen løsning