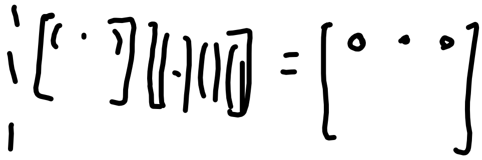
Gauss-Jordan eliminasjon

Matriselikninger

Likninger på formen

$$Ax = b$$

A er en matrise, x, b er kolonnevektorer/tupler



Eksempel

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\parallel$$

$$\begin{bmatrix} x + y + 2z \\ 2x + 4y - 3z \\ 3x + 6y - 5z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2x + 4y - 3z &= 1 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned}$$

matrise-likning $\longleftrightarrow$ likningssystem

Eksempler

$$\begin{cases} L_1: x+3y=0 \\ L_2: 3x-3y=8 \end{cases}$$

Formulerer som en matriselikning:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$ ← koeffisientmatrise

høyresiden i likningssystemet: $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix}$

Utvidet matrise: $\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 8 \end{bmatrix}$, $\underbrace{1 \; 3}_{A}$ $\underbrace{0}_{b}$, $[A \; b]$ ← generell notasjon for utvidet matrise

Istedet for å legge multiplum av likningene til hverandre (slik vi gjorde i addisjons-met.), skal vi nå legge multiplum av radene i den utvidete matrisen til hverandre.

Mens vi før brukte notasjon L_1, L_2 etc. bruker vi nå R_1, R_2 etc.

Operasjonene som er tillat:

- multiplisere rader med en konst. $(\neq 0)$
- bytte om på to rader
- legge til et multiplum av en rad til en annen

$$\begin{array}{c} \\ R_1 \\ R_2 \end{array} \begin{array}{ccc} x & y & \\ \hline \end{array}$$

$\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 8 \end{bmatrix} \overset{-3R_1+R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -12 & 8 \end{bmatrix}$ ← eliminert x fra R_2

$\overset{4R_1+R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 0 & -12 & 8 \end{bmatrix}$

$\overset{\frac{R_1}{4}, \frac{R_2}{-12}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$ → identitets-matrise

$4R_1: 4 \; 12 \; 0$
$+R_2: 0 \; -12 \; 8$
$= 4 \; 0 \; 8$

$\frac{R_1}{4}: \frac{4}{4} \; \frac{0}{4} \; \frac{8}{4}$
$= 1 \; 0 \; 2$

'konverterer' til likningssystem →

$x = 2$
$y = -\frac{2}{3}$ $\Rightarrow (x, y) = (2, -\frac{2}{3})$

$-\frac{8}{12} = -\frac{4 \cdot 2}{3 \cdot \cancel{4}} = -\frac{2}{3}$

$$\begin{cases} 2x+2y+4z=16 \\ x+y+z=4 \\ -x+y+2z=6 \end{cases}$$ ← oppgave fra forrige uke

Finne koeff. matrise:

$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 16 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & 16 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ ← utvidet matrise

$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & 16 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} \overset{\frac{R_1}{2}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} \overset{\substack{-R_1+R_2 \\ R_1+R_3}}{\sim}$

$-R_1: -1 \; -1 \; -2 \; -8$
$R_2: 1 \; 1 \; 1 \; 4$
$= 0 \; 0 \; -1 \; -4$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & 4 & 14 \end{bmatrix} \overset{R_2 \leftrightarrow R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 2 & 4 & 14 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{bmatrix}$

$\overset{\frac{R_2}{2}, \frac{R_3}{-1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, det som gjenstår er å få en redusert trappeform

↖ vi har trappeform

$\overset{R_2 - 2R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \overset{R_1 - 2R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

$R_1: 1 \; 1 \; 2 \; 8$
$-2R_3: 0 \; 0 \; -2 \; -8$
$: 1 \; 1 \; 0 \; 0$

$\overset{R_1 - R_2}{\sim} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$ identitets-matrisen!

$\Rightarrow$ $x = 1$, $y = -1$, $z = 4$

$\Rightarrow (x, y, z) = (1, -1, 4)$

x_n = Saldo på lønnskonto til person x i måned n

y_n = — " — person y

z_n = — " — person z

Person x bruker 95% av lønna si hver mnd.
+ ingen renter

Person y bruker ingenting av lønna og har gode(!) renter, 10%.

Person z bruker ingenting, har ingen renter

Poenget er: ingen endring på kontoen.

x_{n+1} = saldo i måned n+1

$= \left(1-\frac{95}{100}\right)x_n$

vekstfaktor

redusere en verdi med p% => multipliser med $1-\frac{p}{100}$

$= (1-0.95)x_n$

$= 0.05x_n$

$y_{n+1} = \left(1+\frac{10}{100}\right)y_n$

$= (1+0.1)y_n$

$= 1.1\, y_n$

øke en verdi med p% => multipliser med $1+\frac{p}{100}$

$z_{n+1} = z_n$

$x_{n+1} = 0.05\,x_n$

$y_{n+1} = 1.1\,y_n$, ønsker å skrive

$z_{n+1} = z_n$ på formen $\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix}$

$x_{n+1} = \underline{0.05}\,x_n + \underbrace{\underline{0}\cdot y_n}_{0} + \underbrace{\underline{0}\cdot z_n}_{0}$

$y_{n+1} = \underline{0}\cdot x_n + \underline{1.1}y_n + \underline{0}\cdot z_n$

$z_{n+1} = \underline{0}\cdot x_n + \underline{0}\cdot y_n + \underline{1}\cdot z_n$

overgangsmatrisen er svaret!

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 1.1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix}$$

← gang inn vektor og se at det stemmer

$$M = \begin{bmatrix} 0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 1.1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ er overgangsm.

$$\begin{cases} L_1: & 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ L_2: & -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 1 \\ L_3: & 8x_1 + x_2 + 4x_3 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & 1 \\ 8 & 1 & 4 & -1 \end{bmatrix} \overset{R_1+R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 4 & 1 \\ 8 & 1 & 4 & -1 \end{bmatrix} \overset{\frac{R_1}{2}}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 4 & 1 \\ 8 & 1 & 4 & -1 \end{bmatrix} \overset{-8R_1+R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 4 & 1 \\ 0 & -7 & -4 & -1 \end{bmatrix} \overset{R_2+R_3}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{\frac{R_2}{7}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{R_1-R_2}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & (1-\frac{4}{7}) & -\frac{1}{7} \\ 0 & 1 & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ 0 & 1 & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$1-\frac{4}{7} = \frac{7}{7}-\frac{4}{7} = \frac{7-4}{7} = \frac{3}{7}$

$1\cdot x + 0\cdot y + \frac{3}{7}z = -\frac{1}{7}$

$0\cdot x + y + \frac{4}{7}z = \frac{1}{7}$

$\Rightarrow x + \frac{3}{7}z = -\frac{1}{7} \Rightarrow x = -\frac{1}{7} - \frac{3}{7}z$

$y + \frac{4}{7}z = \frac{1}{7} \qquad y = \frac{1}{7} - \frac{4}{7}z$

z er 'parameter', $z = t$

$x = -\frac{1}{7} - \frac{3}{7}t$

$y = \frac{1}{7} - \frac{4}{7}t$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{7} - \frac{3}{7}t \\ \frac{1}{7} - \frac{4}{7}t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{7}t \\ -\frac{4}{7}t \\ t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{3}{7} \\ -\frac{4}{7} \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} \\ 0 \end{bmatrix}$$