Populasjonsdynamikk

Omhandler hvordan populasjoner utvikler seg (f. eks over tid)

En tilstandsvektor forteller oss innholdet i populasjonene etter n overganger.

$$u_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix}$$

En initialvektor u_0 er en tilstandsvektor ved $n=0$.

$$u_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

En overgangsmatrise M definerer hva som skjer fra n til $n+1$

$$u_{n+1} = M u_n$$

Anta at vi kjenner u_0:

$$u_1 = M \cdot u_0$$
$$u_2 = M u_1 = M(M u_0) = M^2 u_0$$
$$u_3 = M u_2 = M(M^2 u_0) = M^3 u_0$$
$$\vdots$$
$$u_n = M^n \cdot u_0$$

M^n er vanskelig å finne. Lettere å finne u_n ved bruk av egenverdier og egenvektorer.

Finne v, λ slik at $Mv = \lambda v$? ← egenverdier
← egenvektorer

~~1. Finne egenverdier~~

Tar utgangspunkt i $Mv = \lambda v$

$$\Updownarrow$$
$$\boxed{\det(M - \lambda I) = 0} \leftarrow \text{karakteristisk ligning}$$

polynom som kalles det karakteristiske polynomet

løsningene til ligningen er egenverdiene til M.

Merk: $\det(M - \lambda I) = (\lambda - a)(\lambda - b)(\lambda - c)$

$\Rightarrow a, b, c$ er egenverdier

2. Finner egenvektorer

Skal nå finne vektorer v_i slik at $M v_i = \lambda_i v_i$ for egenverdiene λ_i som vi fant over

Finner vi ved å sette opp den utvidede matrisen

$$\left[\begin{array}{c|c} M - \lambda_i I & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \end{array}\right] \leftarrow \text{løs ved G-J}$$

Merk: dette likningssystemet har alltid uendelig mange løsninger ($\Rightarrow$ uendelig mange egenvektorer). Bruker parameterfremstilling for å angi alle egenvektorene. Men, er bare interessert i én egenvektor (per egenverdi).

Vi har funnet λ, v slik at $Mv = \lambda v$

$$\Rightarrow \underline{M^n v = \lambda^n v} \leftarrow \text{mye enklere}$$

Men hva hvis v 'bare' er en tilstandsvektor og ikke en egenvektor. Vi bruker et 'triks' og skriver v som en lineær kombinasjon av egenvektorer.

F.eks. anta M har tre egenvektorer

$v = \cancel{k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3}$

Da får vi

$$M^n v = M^n(k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3)$$
$$= k_1 M^n v_1 + k_2 M^n v_2 + k_3 M^n v_3$$
$$= k_1 \lambda_1^n v_1 + k_2 \lambda_2^n v_2 + k_3 \lambda_3^n v_3$$

Man vil ofte se hva som skjer etter mange overganger, $n \to \infty$.

~~Likevektsfordeling~~

Vi søker tilstandsvektorer som ikke $\begin{bmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{bmatrix}$ slik at

$$M \begin{bmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{bmatrix}$$

~~Attraktorbassenget~~ til en likevektsfordeling er alle tilstander $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ som til slutt blir likevektsfordelingen, dvs.

$$M^n \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \xrightarrow{n \to \infty} \begin{bmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{bmatrix}$$

Eksempel

x_n = inneholdet i A ved tiden n

y_n = — " — B — " —

z_n = — " — C — " —

initialfordeling $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$, overgangsmatrise

$$M = \begin{bmatrix} 1.3 & -0.1 & 0.2 \\ 0 & 0.8 & 0.4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Finne egenvektorer og egenverdier

(b) Finn en likevektsfordeling og tilh. attraktorbasseng.

(a) Egenverdier:

$$\det(M - \lambda I) = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} 1.3-\lambda & -0.1 & 0.2 \\ 0 & (0.8-\lambda) & 0.4 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1.3-\lambda)(0.8-\lambda)(1-\lambda) = 0$$

$\lambda_1 = 1.3$, $\lambda_2 = 0.8$, $\lambda_3 = 1$

$\lambda_1 = 1.3$

Ønsker å finne $v_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$ slik at $M v_1 = \lambda_1 v_1$, gjøres ved å løse:

$$\left[\begin{array}{c|c} \cancel{M - \lambda_1 I} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} 1.3-1.3 & -0.1 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.8-1.3 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 1-1.3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.1 & 0.2 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & -0.3 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow y_1 - 2z_1 = 0$

$\Rightarrow z_1 = 0 \Rightarrow y_1 = 0$, x_1 kan være hva som helst $\Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 0.8$

$$\begin{bmatrix} 1.3-0.8 & -0.1 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.8-0.8 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 1-0.8 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.1 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -0.2 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x_2 - 0.2 y_2 + \cancel{0.4 z_2} = 0 \\ 0.4 z_2 = 0 \\ 0.2 z_2 = 0 \end{array}$$

$z_2 = 0$

$x_2 = 0.2 y_2$

$5x_2 = y_2$, innfører parameter $x_2 = s$

$\Rightarrow y_2 = 5s$

$\Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} s \\ 5s \\ 0 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$

$\underline{\lambda_3 = 1}$

$$\begin{bmatrix} 1.3-1 & -0.1 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.8-1 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 1-1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 & -0.1 & 0.2 & 0 \\ 0 & -0.2 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\frac{R_2}{2}}{\sim} \begin{bmatrix} 0.3 & -0.1 & 0.2 & 0 \\ 0 & -0.1 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{R_1-R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 0.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_3 = 0$

$-0.1y_3 + 0.2z_3 = 0$

$\Rightarrow -0.1y_3 = -0.2z_3 \xRightarrow{\cdot(-10)} y_3 = 2z_3$

multipliser med -10 på begge sider

$z_3 = s$

$\Rightarrow v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2s \\ s \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$

16) Finn $\begin{pmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{pmatrix}$ s.a. $\boxed{M\begin{pmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{pmatrix}}$

$$\begin{bmatrix} 1.3 & -0.1 & 0.2 \\ 0 & 0.8 & 0.4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.3x_s - 0.1y_s + 0.2z_s \\ 0\cdot x_s + 0.8y_s + 0.4z_s \\ 0\cdot x_s + 0\cdot y_s + 1\cdot z_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.3x_s - 0.1y_s + 0.2z_s \\ 0.8y_s + 0.4z_s \\ z_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{pmatrix}$$

Skriv som likningssystem:

$1.3x_s - 0.1y_s + 0.2z_s = x_s$

$0.8y_s + 0.4z_s = y_s$

$z_s = z_s$

Observerer at å løse likningen $M\begin{pmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{pmatrix}$ er det samme som

å løse $\underline{M\begin{pmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{pmatrix}}$

egenvektorene tilh. egenverdien $\lambda_3 = 1$

$\begin{pmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2s \\ s \end{pmatrix}$

er likevektsfordeling for alle s

Sett $s = 1$, se på likevektsfordelingen $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Finn tilh. attraktorbasseng. dvs. alle $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ s.a. $M^n\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \xrightarrow{n\to\infty} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Vi skriver $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ som en lineær kombinasjon av egenvektoren.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k_1\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=v_1} + k_2\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=v_2} + k_3\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=v_3}$$

$$= \begin{pmatrix} k_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_2 \\ 5k_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2k_3 \\ k_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} k_1 + k_2 \\ 5k_2 + 2k_3 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$\underline{x = k_1 + k_2} \Rightarrow \underline{k_1 = x - k_2}$

$y = 5k_2 + 2k_3 \Rightarrow y = 5k_2 + 2z$

$z = k_3$

$\Rightarrow 5k_2 = y - 2z$

$k_2 = \frac{y - 2z}{5}$

Skriv x som $\frac{5x}{5}$

$\Rightarrow \underline{k_1 = x - k_2} = \underline{x} - \left(\frac{y-2z}{5}\right) = \frac{1}{5}(5x - y + 2z)$

Vi har nå skrevet $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ som en lineær komb. av v_1, v_2, v_3:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3$$

$$= \frac{1}{5}(5x - y + 2z)\cdot v_1 + \left(\frac{y-2z}{5}\right)v_2 + zv_3$$

$$M^n\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M^n\left(\left(\frac{1}{5}(5x - y + 2z)\right)v_1 + \left(\frac{y-2z}{5}\right)v_2 + zv_3\right) = \frac{1}{5}(5x-y+2z)\underbrace{M^nv_1}_{\lambda_1^nv_1} + \left(\frac{y-2z}{5}\right)\underbrace{M^nv_2}_{\lambda_2^nv_2} + z\overbrace{M^nv_3}^{\lambda_3^nv_3}$$

$$= \frac{1}{5}(5x-y+2z)\lambda_1^nv_1 + \left(\frac{y-2z}{5}\right)\lambda_2^nv_2 + z\lambda_3^nv_3$$

$$= \frac{1}{5}(5x-y+2z)1.3^nv_1 + \left(\frac{y-2z}{5}\right)0.8^n + z1^n\cdot v_3$$

$$= \frac{1}{5}(5x-y+2z)1.3^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(\frac{y-2z}{5}\right)0.8^n\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + z\cdot 1^n\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}(5x-y+2z)\cdot 1.3^n + \left(\frac{y-2z}{5}\right)0.8^n \\ \left(\frac{y-2z}{5}\right)\cdot 0.8^n\cdot 5 + 2z \\ z \end{pmatrix}$$

$n\to\infty$

$\longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

0 ∞ 0

$z = 1$, $(1.3)^n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$

$0.8^n \to 0$

$\frac{1}{5}(5x - y + 2z) = 0$

eneste som må være innfridd (i tillegg til $z = 1$)

Sett inn for $z = 1$:

$\frac{1}{5}(5x - y + 2\cdot 1) = 0$

$x - \frac{y}{5} + \frac{2}{5} = 0 \Rightarrow x = \frac{y}{5} - \frac{2}{5} = \frac{y-2}{5}$

$y = s \Rightarrow x = \frac{s-2}{5}, y = s, z = 1$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{s-2}{5} \\ s \\ 1 \end{pmatrix}}_{} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{s}{5} \\ s \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{}$$

attraktorbassenget