# Snublegruppe 5/10 Tam

## Plan:

* Litt om differenslikninger
* Annen ordens lineær homogen differenslikn (8.1)
  - generelt
  - eksempler (tidligere eksamensoppgaver)
* Første ordens lineær differenslikn
  - homogene
  - inhomogene

  } rep. 28/9

OBS!

* ingen snublegruppe 12/10
* Orakelhjelp 12/10 kl. 10–16

## * Differenslikninger

Differenslikninger beskriver (alle ledd i) en tallfølge

Eksempel

$$\boxed{x_{n+1} = 2x_n \quad , \quad x_0 = 1}$$

Husk løsning $x_n = c \cdot r^n$

Løsning: $x_n = c \cdot 2^n$

For $x_0 = 1$: $c \cdot 2^0 = 1$

$c = 1$

$\Rightarrow \quad \underline{\underline{x_n = 2^n}}$

likningen $x_{n+1} = 2x_n$, der $x_0 = 1$ beskriver tallfølgen

$$\underset{x_0}{2^0}, \underset{x_1}{2^1}, \underset{x_2}{2^2}, \underset{x_3}{2^3}, \ldots = 1, 2, 4, 8, \ldots$$

I MAT1001 (4 type differenslikningen)

1.orden (lineær)
- homogen (kap 6.1)
- inhomogen (kap 6.2)

2.orden (lineær)
- homogen kap (8.1)
- inhomogen kap. 8.2

ikke pensum til midtveiseksamen

* Annen ordens lineær homogen differenslikning (kap 8.1)

$X_{n+2} + b \cdot X_{n+1} + c \cdot X_n = 0$ , $b, c \in \mathbb{R}$

$c \neq 0$

$n \geq 0$

Løsningsmetode:

Karakteristisk likning!!

$r^2 + b \cdot r + c = 0$

Løser ved hjelp av "ABC-formel"

$$\boxed{r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

3 tilfeller for r

i) to ulike reelle løsninger

→ løsning: $X_n = C \cdot r_1^n + D \cdot r_2^n$ , $C, D \in \mathbb{R}$

ii) én reell løsning

→ løsning: $X_n = C \cdot r_1^n + D \cdot n \cdot r_1^n$ , $C, D \in \mathbb{R}$

iii) to komplekse løsninger

kompleks form → løsning $X_n = E \cdot r_1^n + \bar{E} \cdot \bar{r}_1^n$ $E \in \mathbb{C}$

reell form → løsning $X_n = \rho^n [C \cos(n \cdot \theta) + D \cdot \sin(n \cdot \theta)]$

$C, D \in \mathbb{R}$

## * Eksempler 2. ordens homogen

M.eksamen 2011, oppgave 9

$$x_{n+2} + 2x_{n+1} - 3x_n = 0 \quad , \quad \begin{array}{l} x_0 = 2 \\ x_1 = 2 \end{array}$$

Finn verdien av $x_{2011}$

$$r^2 + 2r - 3 = 0$$

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 1 & r_1 \\ -3 & r_2 \end{cases}$$

$$x_n = C \cdot 1^n + D \cdot (-3)^n$$

For $x_0 = 2$: $C \cdot 1^0 + D \cdot (-3)^0 = 2$

$C + D = 2$     I

For $x_1 = 2$: $C \cdot 1^1 + D(-3)^1 = 2$

$C - 3D = 2$     II

I: $C = 2 - D$

(I→II) II: $2 - D - 3D = 2$

$-4D = 0$

$\underline{D = 0}$

(II→I) I: $\underline{C = 2}$

$$\Longrightarrow x_n = 2 \cdot 1^n + 0 \cdot (-3)^n$$
$$= \underline{2}$$

$$\longrightarrow x_0 = x_1 = x_2 = \dots = x_{2011} = \dots = \underline{\underline{2}}$$

# M.eksamen H 2010, oppgave 11

Finne $x_{15}$

$$x_{n+2} - \sqrt{3}\,x_{n+1} + x_n = 0 \quad , \quad x_0 = 0, \; x_1 = 1$$

$$r^2 - \sqrt{3}\,r + 1 = 0$$

$$r = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{(-\sqrt{3})^2 - 4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1} = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{3-4}}{2} = \frac{\sqrt{3} \pm i}{2} = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} & r_1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} & \end{cases}$$

$r_2 = \bar{r}_1$

Må finne $\rho$ og $\theta$:

Husk, løsning:
$\rho^n[C\cdot\cos(n\cdot\theta) + D\cdot\sin(n\cdot\theta)]$

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$$

Husk:
$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$
$\cos(\theta) = \frac{a}{\rho}$
$\sin(\theta) = \frac{b}{\rho}$

$\left.\begin{array}{l} \cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta)\ \frac{1}{2} \end{array}\right\}$ Fra tabell/sirkel $\to \theta = \pi/6$

$$\Rightarrow x_n = 1^n[C\cdot\cos(n\cdot\pi/6) + D\cdot\sin(n\cdot\pi/6)]$$

For $x_0 = 0$: $C\cdot\cos(0) + D\cdot\sin(0) = 0$

$$C = 0$$

For $x_1 = 1$: $C\cdot\cos(\pi/6) + D\cdot\sin(\pi/6) = 1$

$$\overset{0}{C}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + D\cdot\frac{1}{2} = 1$$

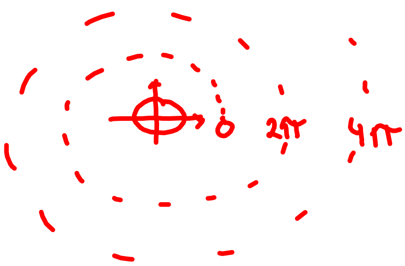
$$\frac{1}{2}D = 1$$

$$D = 2$$

$$x_n = 2\cdot\sin(n\cdot\pi/6)$$

$$\Rightarrow x_{15} = 2\cdot\sin(15\cdot\pi/6)$$
$$= 2\cdot\sin\left(\frac{5}{2}\pi - 2\pi\right)$$
$$= 2\cdot\sin(\pi/2)$$
$$= 2\cdot1 = 2$$

Kan alltid trekke fra eller legge til $2\pi$!



M. eksamen 2013, oppgave 17

Finn $x_5$

$x_{n+1} - x_n = 2n+1$ , $x_0 = 0$

$F(n)$

$$\boxed{x_n = x_n^h + x_n^p}$$

$x_n^h = c \cdot 1^n$

$x_n^p$: Siden $f(n) = 2n+1$, gjetter vi løsn. $x_n^p = An+B$

$\longrightarrow A(n+1)+B-(An+B) = 2n+1$

$An + A + \cancel{B} - \cancel{An} - \cancel{B} = 2n+1$

$A = 2n+1$ går ikke!

går opp 1 grad! gjetter løsning $x_n^p = An^2 + Bn + C$

$\longrightarrow A(n+1)^2 + B(n+1) + C - (An^2 + Bn + C) = 2n+1$

$\cancel{An^2} + 2An + A + \cancel{Bn} + B + \cancel{C} - \cancel{An^2} - \cancel{Bn} - \cancel{C} = 2n+1$

$2An + A + B = 2n + 1$

$\longrightarrow 2A = 2$ I

$A + B = 1$ II

I: $A = 1$

II: $B = 0$

$\Rightarrow x_n = \underbrace{c \cdot 1^n}_{x_n^h} + \underbrace{n^2}_{x_n^p}$

Fra $x_0 = 0$: $c \cdot 1^0 + 0 = 0$

$c = 0$

$x_5 = 5^2 = 25$

Alternativt (M.eksamen 2013, oppgave 17)

Har likning $\boxed{x_{n+1} - x_n = 2n+1 \; , \; x_0 = 0}$

$x_{n+1} = x_n + 2n + 1$

$n=0: \; x_1 = x_0 + 2\cdot 0 + 1 = 1$

$n=1: \; x_2 = x_1 + 2\cdot 1 + 1 = 4$

$n=2: \; x_3 = x_2 + 2\cdot 2 + 1 = 9$

$n=3: \; x_4 = x_3 + 2\cdot 3 + 1 = 16$

$n=4: \; x_5 = x_4 + 2\cdot 4 + 1 = \underline{\underline{25}}$