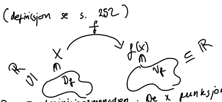
Funksjoner

(definisjon se s. 252)



D_f := definisjonsmengden. De x funksjonen er definert for

V_f := verdimengden. De verdiene funksjonen antar

$$V_f = \{ f(x) : x \in D_f \}$$

Eksempler

- $f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$ absolutt verdifunksjonen

  $D_f = \mathbb{R}$, $V_f = [0, \infty)$
  $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

- $f(x) = 2 - x^2$, $D_f = \mathbb{R}$
  $V_f = (-\infty, 2]$

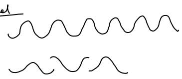
- $f(x) = \frac{1}{x}$, $V_f = (-\infty, \infty)$
  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $(= \mathbb{R})$

Kontinuitet

- Matematisk definisjon: for alle $\varepsilon > 0$ eksisterer $\delta > 0$ slik at $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, $|x - y| < \delta$

- en mer intuitiv og nyttig (?) definisjon på kontinuitet: funksjonen f er kontinuerlig hvis man kan tegne grafen til funksjonen uten å løfte pennen fra arket.

Eksempel



Grenseverdier

Med notasjonen:
$$\lim_{x \to \infty} f(x)$$
mener vi hva f(x) går mot når x går mot ∞.

Evt. kan vi se på $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

Eksempel

$$\lim_{x \to \infty} |x| = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} 2 - x^2 = -\infty$$

Det er ingen til å ikke å betrakte grenser på formen $\lim_{x \to a} f(x)$. Bare se på $f(x) = \frac{1}{x}$ for $a = 0$, $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ eksisterer ikke.

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty, \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

Vi må også kunne regne med grenseverdier, ikke bare plotte funksjonene som vi gjorde over.

Har følgende regneregler for grenseverdier:

La $\lim_{x \to \infty} f(x) = a$, $\lim_{x \to \infty} g(x) = b$.

Da er:

(1) $\lim_{x \to \infty} (f(x) \pm g(x)) = a \pm b$

(2) $\lim_{x \to \infty} f(x)g(x) = ab$

(3) $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$, forutsatt $b \neq 0$.

Eksempel

Finn grenseverdien
$$\lim_{x \to \infty} \frac{7x^2 + 4x^4}{3x^3 - 2x^2}$$

Ønsker å bruke (3) ovenfor.

$$\lim_{x \to \infty} 7x^2 + 4x^4 = \left(\lim_{x \to \infty} 7x^2\right) + \left(\lim_{x \to \infty} 4x^4\right) = \infty + \infty = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} 3x^3 - 2x^2 = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{7x^2 + 4x^4}{3x^3 - 2x^2} = \frac{\lim_{x \to \infty} 7x^2 + 4x^4}{\lim_{x \to \infty} 3x^3 - 2x^2} = \frac{\infty}{\infty} \leftarrow \text{ikke OK}$$

Triks: faktoriserer ut den x'en med høyest eksponent i nevner, fra teller og nevner.

Altså: teller: $7x^2 + 4x^4 = \frac{7x^3}{x} + 4x^3 \cdot x = x^3\left(\frac{7}{x} + 4x\right)$

nevner: $3x^3 - 2x^2 = 3 \cdot x^3 - \frac{2x^3}{x} = x^3\left(3 - \frac{2}{x}\right)$

$$\frac{7x^2 + 4x^4}{3x^3 - 2x^2} = \frac{\cancel{x^3}\left(\frac{7}{x} + 4x\right)}{\cancel{x^3}\left(3 - \frac{2}{x}\right)} = \frac{\frac{7}{x} + 4x}{3 - \frac{2}{x}}$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{7}{x} + 4x\right) = \left(\lim_{x \to \infty} \frac{7}{x}\right) + \left(\lim_{x \to \infty} 4x\right) = 0 + \infty = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(3 - \frac{2}{x}\right) = \left(\lim_{x \to \infty} 3\right) - \left(\lim_{x \to \infty} \frac{2}{x}\right) = 3 - 0 = 3$$

Oppsummert,
$$\lim_{x \to \infty} \frac{7x^2 + 4x^4}{3x^3 - 2x^2} = \frac{\infty}{3} = \infty$$

Vi møter typisk følgende funksjoner i MAT1001:

polynomfunksjoner:

La $n \in \mathbb{N}$, eller $n = 0$ da er
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$
en n'te gradsfunksjoner

f.eks. $f(x) = 2 - x^2 = -x^2 + 2$ som vi så på tidligere

$D_f = \mathbb{R}$, V_f varierer, disse funksjonene er kontinuerlige

° rasjonale funksjoner

$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ der p, q er polynomfunksjoner

$D_f = \{x : q(x) \neq 0\}$

disse funksjonene der de definert altså alle x slik at $q(x) \neq 0$.

Eks.
$f(x) = \frac{1}{x}$, $p(x) = 1$
$q(x) = x$

° rotfunksjoner

$f(x) = Cx^{m/n} = C\sqrt[n]{x^m}$,
$C \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{N}$
$n \neq 1$, n deler ikke m

Hvorfor $n \neq 1$? $n=1 \Rightarrow f(x) = Cx^m$ ← polynomfunksjon

Hvorfor må ikke n dele m? , $m=6, n=3$
$\Rightarrow f(x) = Cx^{\frac{6}{3}}$
$= Cx^2$ ← polynomfunksjoner

Husk: vi kan ikke ta partallsrøtter av negative tall (x er reelt), derfor vil D_f avhenge av m, n

$$D_f = \begin{cases} [0, \infty) & , m \text{ oddetall}, n \text{ er et partall} \\ \mathbb{R} & , \text{ellers} \end{cases}$$

Rotfunksjoner er kontinuerlige der de er definert.

eksponential- og logaritmefunksjoner

eksponentialfunksjonen $f(x) = e^x$
$e = 2.71828\ldots$

med tilhørende logaritmefunksjon
$g(x) = \ln x$

$e^{\ln x} = x$

$D_f = \mathbb{R}$, $V_f = (0, \infty)$

$D_g = (0, \infty)$, $V_g = (-\infty, \infty)$

trigonometriske funksjoner

$f(x) = \cos x$
$g(x) = \sin x$
$D_f = D_g = \mathbb{R}$, $V_f = V_g = [-1, 1]$

$h(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
$D_h = \{x \in \mathbb{R} : \cos x \neq 0\}$
$= \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}\}$
$V_h = \mathbb{R}$