Harmoniske svingninger

Starter der vi slutter sist: trigonometriske funksjoner

$\cos x \quad , \quad \sin x$

Ser på plott:

$\cos x$: gjentagende mønster med periode 2π
$\sin x$: gjentagende mønster med periode 2π

Observerer at sinuskurven 'følger etter' cosinus. De følger etter hverandre med en faseforskyvning på $\frac{\pi}{2}$.

Altså:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$$

f.eks.

$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos 0$ (satt inn for $x = 0$)

$\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \pi$

harmoniske svingninger := periodiske bevegelser som kan beskrives ved sinus- eller cosinus-funksjoner

Merk: Siden man kan uttrykke sinusfunksjoner ved cosinusfunk. så kan vi betrakte en harmonisk svingning som noe som kan beskrives ved cosinusfunksjoner (eller sinusfunksjoner).

Innfører noen begreper man bruker når man snakker om harmoniske funksjoner (og eksemplifiserer ved å se på $\cos x$).

- **maksimum- og minimumverdier**
  (laveste verdi på y-aksen = min, høyeste ——〃—— = max) for $\cos x$:
  max = 1
  min = −1

- **middelverdi:**
  gjennomsnitt av maks og min., benevnes med A_0
  for $\cos x$:
  $$A_0 = \frac{\min + \max}{2} = \frac{-1 + 1}{2} = 0$$

- **amplitude**
  det maksimale utslaget / avstanden fra middelverdien, benevnes med A
  $\cos x$: $A = 1$

- **periode**
  avstanden mellom toppene, benevnes med T
  $T = 2\pi$

- **sirkelfrekvens**
  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ (ω = 'omega'), $\cos x$: $\omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$

- **akrofase**
  forteller oss hvor toppen til svingningen i intervallet $[0, T)$ ligger (merk: kun én topp i dette intervallet)
  $\cos x$: akrofasen = 0

Sammenlikner med sinus:
alle egenskaper er like, med unntak av akrofasen (akrofasen til $\sin x$ er $\frac{\pi}{2}$)

Vi skal se på hva som skjer når vi endrer middelverdien, amplituden ... (etc.) til cosinus:

- **forandrer middelverdien fra 0 til A_0:**
  $$f(x) = A_0 + \cos x$$
  merk at maks. og min. endres

- **forandre amplituden**
  $$f(x) = A\cos x$$
  merk at maks. og min. endres

- **forandre perioden fra 2π til T**
  dvs. endre avstanden mellom toppene.

  Hvis vi ønsker periode T, multipliserer vi med $\frac{2\pi}{T}$, altså $\cos\left(\frac{2\pi}{T}x\right)$ har periode T.

Hvorfor? Vi tar utgangspunkt i at $\cos x$ har periode 2π. Ser at $\cos\left(\frac{2\pi}{T}x\right) = 1$ for $x = 0$. Perioden er da gitt ved minste $x > 0$ slik at $\cos\left(\frac{2\pi}{T}x\right) = 1$
$\iff$
minste $x > 0$ slik $\frac{2\pi}{T}x = 2\pi k$, $k \in$

$\frac{x}{T} = k$ (deler med 2π på beg sider)

$x = Tk = T$ ($k = 1$)

(skal ha minste x med denne egenskape

eks.

$$f(x) = \cos(2x)$$

$\cos\left(\frac{2\pi}{T}x\right)$ har periode T

$2 = \frac{2\pi}{T}$ ← likning som inneholder perio som ukjent

$\Downarrow$

$T = \frac{2\pi}{2} = \pi$

- **forandre akrofasen fra 0 til x_0**
  $f(x) = \cos(x - x_0)$ har akrofase x_0

Funksjonen f gitt ved

Skal skrive $H(x)$ på formen

$$H(x) = A\cos(\omega(x - x_0))$$

Merk: vi ser på
$H(x) = \cos(\frac{\pi}{3}x) + \cos(\frac{\pi}{3}(x-1)) + \cos(\frac{\pi}{3}(x-2))$

Vår generelle formel for harmonisk svingning er

$$f(x) = A_0 + A\cos(\underbrace{\tfrac{2\pi}{T}}_{=\omega}(x - x_0))$$
$$= A_0 + A\cos(\omega(x - x_0))$$

A_0 = middelverdien = 0 i tilfellet i obligen.

Lurt triks:

$$\boxed{\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)}$$

$$\cos(\tfrac{\pi}{3}(x-1)) = \cos(\tfrac{\pi}{3}x - \tfrac{\pi}{3})$$
$$= \cos(\tfrac{\pi}{3}x + (-\tfrac{\pi}{3})), \quad a = \tfrac{\pi}{3}x, \; b = -\tfrac{\pi}{3}$$
$$= \cos(\tfrac{\pi}{3}x)\underbrace{\cos(-\tfrac{\pi}{3})}_{=\frac{1}{2}} - \sin(\tfrac{\pi}{3}x)\underbrace{\sin(-\tfrac{\pi}{3})}_{=-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$
$$= \tfrac{1}{2}\cos(\tfrac{\pi}{3}x) - (-\tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin(\tfrac{\pi}{3}x))$$
$$= \tfrac{1}{2}\cos(\tfrac{\pi}{3}x) + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin(\tfrac{\pi}{3}x)$$

$$\cos(\tfrac{\pi}{3}(x-2)) = \cos(\tfrac{\pi}{3}x - \tfrac{2\pi}{3})$$
$$= \cos(\tfrac{\pi}{3}x + (-\tfrac{2\pi}{3})), \quad a = \tfrac{\pi}{3}x, \; b = -\tfrac{2\pi}{3}$$
$$= \cos(\tfrac{\pi}{3}x)\underbrace{\cos(-\tfrac{2\pi}{3})}_{=-\frac{1}{2}} - \sin(\tfrac{\pi}{3}x)\underbrace{\sin(-\tfrac{2\pi}{3})}_{=-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$
$$= -\tfrac{1}{2}\cos(\tfrac{\pi}{3}x) + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin(\tfrac{\pi}{3}x)$$

Skriver ned uttrykket på nytt:

$$H(x) = \cos\tfrac{\pi}{3}x + \cos(\tfrac{\pi}{3}(x-1)) + \cos(\tfrac{\pi}{3}(x-2))$$
$$= \cos\tfrac{\pi}{3}x + \left(\tfrac{1}{2}\cos(\tfrac{\pi}{3}x) + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin(\tfrac{\pi}{3}x)\right)$$
$$+ \left(-\tfrac{1}{2}\cos(\tfrac{\pi}{3}x) + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin(\tfrac{\pi}{3}x)\right)$$
$$= \left(\cos\tfrac{\pi}{3}x + \cancel{\tfrac{1}{2}\cos\tfrac{\pi}{3}x} - \cancel{\tfrac{1}{2}\cos\tfrac{\pi}{3}x}\right) + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin(\tfrac{\pi}{3}x)$$
$$+ \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin(\tfrac{\pi}{3}x)$$
$$= \cos\tfrac{\pi}{3}x + \sqrt{3}\sin(\tfrac{\pi}{3}x)$$
$$= \cos\tfrac{\pi}{3} + \sqrt{3}\cos(\tfrac{\pi}{3}x - \tfrac{\pi}{2})$$

$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$

$\sin(\frac{\pi}{3}x) = \sin((\frac{\pi}{3}x - \frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{3}x - \frac{\pi}{2})$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}(x-1)\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}x - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{2\pi}{3}x + \left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

$$= \cos\left(\frac{2\pi}{3}x\right)\underbrace{\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}_{=-\frac{1}{2}} - \sin\left(\frac{2\pi}{3}x\right)\underbrace{\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}_{=-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= -\frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{3}x\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{3}x\right)$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}(x-2)\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}x - \frac{2\pi}{3}\cdot 2\right)$$

$$= \cos\left(\frac{2\pi}{3}x + \left(-\frac{4\pi}{3}\right)\right)$$

$$= \cos\left(\frac{2\pi}{3}x\right)\underbrace{\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right)}_{-\frac{1}{2}} - \sin\left(\frac{2\pi}{3}x\right)\underbrace{\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right)}_{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= -\frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{3}x\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{3}x\right)$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}x\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3}(x-1)\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3}(x-2)\right)$$

$$= \cos\left(\frac{2\pi}{3}x\right) + \left(-\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{3}x + \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{3}x\right)}\right)$$

$$+ \left(-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{3}x\right) - \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{3}x\right)}\right)$$

$$= \frac{2}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{3}x\right) - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{3}x\right) - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{3}x\right)$$

$$= \underline{0}$$