DEL 1.

1. Hvilken av funksjonene gir en anti-derivert for $f(x) = (1-x)^{-3}$?

Løsning. Vi setter $u = 1-x$, som gir $du = -dx$,

$$\int (1-x)^{-3}\,dx = -\int u^{-3}\,du = -\frac{1}{-2}u^{-2} = \frac{1}{2}(1-x)^{-2} = \underline{\underline{\frac{1}{2(1-x)^2}}}$$

a) $-\frac{1}{(1-x)^2}$ b) $3(1-x)^{-4}$ c) $\frac{1}{2(1-x)^2}$ d) $2(1-x)^{-2}$ e) $-\frac{1}{4}(1-x)^{-4}$

2. Hvilken av funksjonene gir en anti-derivert for $f(x) = \cos^2(\frac{1}{2}x)$?

Løsning. Vi bruker at $\cos x = \cos^2(\frac{1}{2}x) - \sin^2(\frac{1}{2}x) = \cos^2(\frac{1}{2}x) - (1-\cos^2(\frac{1}{2}x)) = 2\cos^2(\frac{1}{2}x) - 1$, og derfor $\cos^2(\frac{1}{2}x) = \frac{1}{2}(1+\cos x)$. Det gir

$$\int \cos^2(\frac{1}{2}x)\,dx = \int \frac{1}{2}(1+\cos x)\,dx = \underline{\underline{\frac{1}{2}(x+\sin x)}}$$

a) $\frac{2}{3}\cos^3(\frac{1}{2}x)$ b) $\frac{x}{2} + \frac{\sin x}{2}$ c) $-\frac{1}{3}\cos^3(\frac{1}{2}x)$ d) $2\cos(\frac{1}{2}x)\sin(\frac{1}{2}x)$ e) $\frac{x}{2} - \frac{\cos x}{2}$

3. Hvilken av funksjonene gir en anti-derivert for $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

Løsning. Vi setter $u = x^2+1$, og $du = 2xdx$, og derfor

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| = \underline{\underline{\frac{1}{2}\ln(x^2+1)}}$$

a) $\frac{1}{2(x^2+1)^2}$ b) $\ln\frac{x^2}{x^2+1}$ c) $\frac{x^2}{(x^2+1)^2}$ d) $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$ e) $-\ln(x^2+1)$

4. Hvilken av funksjonene gir en anti-derivert for $f(x) = \frac{1}{x}e^x + \ln x \cdot e^x$

Løsning. Vi bruker delvis integrasjon $u = e^x$ og $v' = \frac{1}{x}$ på det første leddet, og ser at dette løser hele problemet

$$\int (\tfrac{1}{x}e^x + \ln x \cdot e^x)\,dx = \ln x \cdot e^x - \int \ln x \cdot e^x\,dx + \int \ln x \cdot e^x\,dx = \underline{\underline{\ln x \cdot e^x}}$$

a) $e^x(\frac{1}{2}x^2 + x)$ b) $\ln x \cdot e^x + \frac{1}{2}(\ln x)^2 e^x$ c) $\ln x \cdot e^x$ d) $\frac{1}{2}\ln x^2 \cdot e^x$ e) $-\frac{1}{x^2}e^x + \frac{1}{x}e^x$

5. Vi betrakter en andre ordens inhomogen differenslikning

$$x_{n+2} - \tfrac{1}{2}x_{n+1} + \tfrac{1}{2}x_n = 2$$

Hvilken av følgende verdier vil x_n gå mot når $n \to \infty$?

Løsning. Likningen har karakteristisk polynom $\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}$, med røtter

$$\lambda = \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 2}}{2} = \tfrac{1}{4} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{4} - 2} = \tfrac{1}{4} \pm i\tfrac{1}{4}\sqrt{7}$$

Vi har $|\lambda| < 1$ som betyr at løsningen av den homogene likningen vil gå mot 0, når $n \to \infty$. Vi finner en spesiell løsning $x_n^s = A$,

$$A - \tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}A = A = 2$$

og dermed $x_n = x_n^h + x_n^s = x_n^h + 2 \to 2$, siden $x_n^h \to 0$.

a) 1 b) 0 c) 2 d) umulig å si e) -1

DEL 2.

Oppgave 1

En andre ordens differensiallikning er gitt ved

$$y'' + \alpha y' + \beta y = 0$$

der α og β er positive reelle konstanter.

a) Regn ut det karakteristiske polynomet til differensiallikningen og skriv røttene uttrykt ved α og β.

Løsning. Det karakteristiske polynomet er gitt ved $r^2 + \alpha r + \beta$, og dette gir

$$r = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2}$$

b) For hvilke verdier av α og β vil løsningen til differensiallikningen beskrive en dempet svingning?

Løsning. Vi får en dempet svingning når diskriminanten $\alpha^2 - 4\beta < 0$, dvs. $\beta > \frac{\alpha^2}{4}$.

c) I resten av oppgaven setter vi $\alpha = 1$ og $\beta = \frac{1}{4}$. Finn den generelle løsning av differensiallikningen i dette tilfellet.

Løsning. De gitte verdiene for α og β gir oss kun en rot, $r = -\frac{1}{2}$, med generell løsning

$$y = Ce^{-\frac{1}{2}x} + Dxe^{-\frac{1}{2}x}$$

d) Finn den spesielle løsningen som tilfredsstiller initialbetingelsen $y(0) = 1$ og $y'(0) = -\frac{1}{2}$.

Løsning. Den deriverte av løsningen er gitt ved

$$y' = -\tfrac{1}{2}Ce^{-\frac{1}{2}x} + De^{-\frac{1}{2}x} - \tfrac{1}{2}Dxe^{-\frac{1}{2}x}$$

Vi setter inn:

$$1 = y(0) = Ce^{-\frac{1}{2}0} + D \cdot 0 \cdot e^{-\frac{1}{2}0} = C$$

og

$$-\tfrac{1}{2} = y'(0) = -\tfrac{1}{2}Ce^{-\frac{1}{2}0} + De^{-\frac{1}{2}0} - \tfrac{1}{2}D \cdot 0 \cdot e^{-\frac{1}{2}0} = -\tfrac{1}{2}C + D$$

som gir $C = 1$ og $D = 0$, eller

$$y = \underline{\underline{e^{-\frac{1}{2}x}}}$$

Oppgave 2 En differensiallikning er gitt ved

$$y' = \lambda x y^2$$

der λ er en positiv konstant og y er en funksjon av x.

a) Løs differensiallikningen og finn et uttrykk for y som en funksjon av x.

Løsning. Vi separerer de variable og likningen omformes til

$$\frac{dy}{y^2} = \lambda x \, dx$$

som gir

$$-\frac{1}{y} = \int \frac{dy}{y^2} = \int \lambda x \, dx = \tfrac{1}{2}\lambda x^2 + C$$

Vi inverterer og får

$$y = -\frac{1}{\frac{1}{2}\lambda x^2 + C} = \underline{\underline{-\frac{2}{\lambda x^2 + 2C}}}$$

b) Vis at dersom vi setter $y(0) = 1$ vil løsningen i a) være gitt ved

$$y(t) = \frac{2}{2 - \lambda x^2}$$

Løsning. Innsetting gir

$$1 = y(0) = -\frac{2}{\lambda \cdot 0 + 2C} = -\frac{2}{2C} = -\frac{1}{C}$$

dvs. $C = -1$, og løsningen blir

$$y = -\frac{2}{\lambda x^2 - 2} = \underline{\underline{\frac{2}{2 - \lambda x^2}}}$$

c) Når $x \to \infty$ vil løsningen y av differensiallikningen stabilisere seg på en bestemt verdi. Finn denne verdien.

Løsning. Den stabile løsningen finner vi ved $y' = 0$, og siden $x \neq 0$ måvi ha $y \to 0$. Dette kan vi også se ved

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2}{2 - \lambda x^2} = 0$$

Oppgave 3

a) Finn alle de antideriverte til funksjonen $f(x) = x \sin x$.

Løsning. Vi bruker delvis integrasjon med $u = x$ og $v' = \sin x$. Det gir

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx = \underline{\underline{-x \cos x + \sin x + C}}$$

b) En første ordens differensiallikning er gitt ved $y' + \frac{1}{x}y = \sin x$, hvor vi antar at $x > 0$. Finn den spesielle løsningen til denne differensiallikningen som tilfredsstiller $y(\pi) = 2$.

Løsning. Den integrerende faktoren er $e^{\int \frac{1}{x}dx} = x$. Det gir

$$\tfrac{d}{dx}(x \cdot y) = x(y' + \frac{1}{x}y) = xy' + y = x \sin x$$

som integrert gir

$$x \cdot y = \int x \sin x \, dx = -x \cos x + \sin x + C$$

Deler vi med x får vi

$$y = -\cos x + \tfrac{\sin x}{x} + \tfrac{C}{x}$$

Innsetting gir

$$2 = y(\pi) = -\cos \pi + \tfrac{\sin \pi}{\pi} + \tfrac{C}{\pi} = 1 + \tfrac{C}{\pi}$$

og dermed $C = \pi$ og videre

$$y = \underline{\underline{-\cos x + \tfrac{\sin x}{x} + \tfrac{\pi}{x}}}$$

Oppgave 4

a) Skriv funksjonen $g(t) = 4\cos\left(\frac{1}{2}t - \frac{\pi}{6}\right)$ på formen $A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$.

Løsning. Vi bruker formelen for cosinus til en differens,

$$\begin{aligned} 4\cos\left(\tfrac{1}{2}t - \tfrac{\pi}{6}\right) &= 4\cos\left(\tfrac{1}{2}t\right)\cos\tfrac{\pi}{6} + 4\sin\left(\tfrac{1}{2}t\right)\sin\tfrac{\pi}{6} \\ &= 4\cos\left(\tfrac{1}{2}t\right)\tfrac{\sqrt{3}}{2} + 4\sin\left(\tfrac{1}{2}t\right)\tfrac{1}{2} \\ &= \underline{\underline{2\sqrt{3}\cos\left(\tfrac{1}{2}t\right) + 2\sin\left(\tfrac{1}{2}t\right)}} \end{aligned}$$

b) Vis at funksjonen $y = e^{-t}g(t)$ tilfredsstiller en 2. ordens differensiallikning

$$y'' + py' + qy = 0$$

Bestem p og q.

Løsning. Med $y = e^{-t}g(t) = 4e^{-t}\cos\left(\frac{1}{2}t - \frac{\pi}{6}\right)$ får vi

$$y' = -4e^{-t}\cos\left(\tfrac{1}{2}t - \tfrac{\pi}{6}\right) - 2e^{-t}\sin\left(\tfrac{1}{2}t - \tfrac{\pi}{6}\right)$$

og

$$\begin{aligned} y'' &= 4e^{-t}\cos\left(\tfrac{1}{2}t - \tfrac{\pi}{6}\right) + 2e^{-t}\sin\left(\tfrac{1}{2}t - \tfrac{\pi}{6}\right) + 2e^{-t}\sin\left(\tfrac{1}{2}t - \tfrac{\pi}{6}\right) - e^{-t}\cos\left(\tfrac{1}{2}t - \tfrac{\pi}{6}\right) \\ &= 3e^{-t}\cos\left(\tfrac{1}{2}t - \tfrac{\pi}{6}\right) + 4e^{-t}\sin\left(\tfrac{1}{2}t - \tfrac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

Dette gir

$$y'' + py' + qy = e^{-t}\left((3 - 4p + 4q)\cos\left(\tfrac{1}{2}t - \tfrac{\pi}{6}\right) + (4 - 2p)\sin\left(\tfrac{1}{2}t - \tfrac{\pi}{6}\right)\right)$$

som betyr $p = 2$ og $q = \frac{5}{4}$.