DEL 1.

1. Hvilken av funksjonene gir en anti-derivert for $f(x) = (1-x)^{-3}$?

a) $-\frac{1}{(1-x)^2}$ b) $3(1-x)^{-4}$ c) $\frac{1}{2(1-x)^2}$ d) $2(1-x)^{-2}$ e) $-\frac{1}{4}(1-x)^{-4}$

2. Hvilken av funksjonene gir en anti-derivert for $f(x) = \cos^2\left(\frac{1}{2}x\right)$?

a) $\frac{2}{3}\cos^3\left(\frac{1}{2}x\right)$ b) $\frac{x}{2} + \frac{\sin x}{2}$ c) $-\frac{1}{3}\cos^3\left(\frac{1}{2}x\right)$ d) $2\cos\left(\frac{1}{2}x\right)\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$ e) $\frac{x}{2} - \frac{\cos x}{2}$

3. Hvilken av funksjonene gir en anti-derivert for $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

a) $\frac{1}{2(x^2+1)^2}$ b) $\ln\frac{x^2}{x^2+1}$ c) $\frac{x^2}{(x^2+1)^2}$ d) $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$ e) $-\ln(x^2+1)$

4. Hvilken av funksjonene gir en anti-derivert for $f(x) = \frac{1}{x}e^x + \ln x \cdot e^x$

a) $e^x(\frac{1}{2}x^2 + x)$ b) $\ln x \cdot e^x + \frac{1}{2}(\ln x)^2 e^x$ c) $\ln x \cdot e^x$ d) $\frac{1}{2}\ln x^2 \cdot e^x$ e) $-\frac{1}{x^2}e^x + \frac{1}{x}e^x$

5. Vi betrakter en andre ordens inhomogen differenslikning

$$x_{n+2} - \frac{1}{2}x_{n+1} + \frac{1}{2}x_n = 2$$

Hvilken av følgende verdier vil x_n gå mot når $n \to \infty$?

a) 1 b) 0 c) 2 d) umulig å si e) -1

DEL 2.

Oppgave 1

En andre ordens differensiallikning er gitt ved

$$y'' + \alpha y' + \beta y = 0$$

der α og β er positive reelle konstanter.

a) Regn ut det karakteristiske polynomet til differensiallikningen og skriv røttene uttrykt ved α og β.

b) For hvilke verdier av α og β vil løsningen til differensiallikningen beskrive en dempet svingning?

c) I resten av oppgaven setter vi $\alpha = 1$ og $\beta = \frac{1}{4}$. Finn den generelle løsning av differensiallikningen i dette tilfellet.

d) Finn den spesielle løsningen som tilfredsstiller initialbetingelsen $y(0) = 1$ og $y'(0) = -\frac{1}{2}$.

Oppgave 2 En differensiallikning er gitt ved

$$y' = \lambda x y^2$$

der λ er en positiv konstant og y er en funksjon av x.

a) Løs differensiallikningen og finn et uttrykk for y som en funksjon av x.

b) Vis at dersom vi setter $y(0) = 1$ vil løsningen i a) være gitt ved

$$y(t) = \frac{2}{2 - \lambda x^2}$$

c) Når $x \to \infty$ vil løsningen y av differensiallikningen stabilisere seg på en bestemt verdi. Finn denne verdien.

Oppgave 3

a) Finn alle de antideriverte til funksjonen $f(x) = x \sin x$.

b) En første ordens differensiallikning er gitt ved $y' + \frac{1}{x} y = \sin x$, hvor vi antar at $x > 0$. Finn den spesielle løsningen til denne differensiallikningen som tilfredsstiller $y(\pi) = 2$.

Oppgave 4

a) Skriv funksjonen $g(t) = 4 \cos\left(\frac{1}{2} t - \frac{\pi}{6}\right)$ på formen $A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$.

b) Vis at funksjonen $y = e^{-t} g(t)$ tilfredsstiller en 2. ordens differensiallikning

$$y'' + p y' + q y = 0$$

Bestem p og q.