UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1001 — Matematikk 1
Eksamensdag:	Torsdag 14. desember 2017
Tid for eksamen:	14.30 – 18.30
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Ett tosidig A4-ark med valgfri tekst, håndskrevet eller trykt, samt godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Til sammen kan du oppnå 66 poeng. Poengene på dagens eksamen legges sammen med den poengsummen du fikk på midtveiseksamen, slik at maksimal samlet poengsum blir 100. Denne summen legges til grunn for karakteren du får i kurset.

Oppgave 1 (6 poeng)

Skriv uttrykket $\cos\left(\frac{1}{2}t\right) + \sqrt{3}\sin\left(\frac{1}{2}t\right)$ på formen $A\cos(\omega t - \phi)$.

Oppgave 2

a) (8 poeng) Regn ut determinanten til matrisen

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha & 2 \end{pmatrix}$$

b) (8 poeng) Et inhomogent lineært ligningssystem er gitt ved

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ -x + y + \alpha z &= 1 \\ \alpha y + 2z &= 2 \end{aligned}$$

Finn α slik at systemet har uendelig mange løsninger og regn ut løsningene i dette tilfellet.

Oppgave 3

a) (8 poeng) Finn alle antideriverte til funksjonen $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, definert for $x > 0$.

b) (8 poeng) Finn en funksjon $y = y(x)$ slik at $y(1) = 1$ og

$$y^2 y' = \frac{2\ln x}{x}$$

(Fortsettes på side 2.)

OPPGAVE 4 (10 POENG)
Regn ut det ubestemte integralet

$$\int \frac{x-3}{(x-1)(x-2)}\,dx$$

OPPGAVE 5
En andre ordens differensialligning er gitt ved

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

a) (4 poeng) Finn den generelle løsningen av denne ligningen.

b) (4 poeng) Finn den spesielle løsningen som oppfyller initialbetingelsene $y(0) = 2$ og $y'(0) = 3$.

OPPGAVE 6 (10 POENG)
Finn den generelle løsningen av den første ordens lineære diffligningen

$$xy' - 2y = x + 2$$

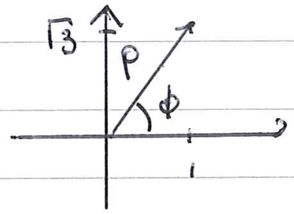
og finn en løsning slik at $y(1) = 0$.

SLUTT

(Fortsettes på side 3.)

FASIT

Oppgave 1



Vi ser på det komplekse tallet

$z = 1 + \sqrt{3}\, i$

$\rho = \sqrt{1+3} = 2$

$\cos\phi = \frac{1}{2} \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{3}$

Svar: $\underline{\underline{2\cos\left(\frac{1}{2}t - \frac{\pi}{3}\right)}}$

Oppgave 2

a)
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 2 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} -1 & \alpha \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = (2-\alpha^2)-(-2) = \underline{\underline{4-\alpha^2}}$$

b) Löser på matriseform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +R_1 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & \alpha & 2 \\ 0 & \alpha & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot\frac{1}{2} \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{\alpha}{2} & 1 \\ 0 & \alpha & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -\alpha R_2 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{\alpha}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 2-\frac{\alpha^2}{2} & 2-\alpha \end{pmatrix}$$

Vi har uendelig mange löninger når den siste raden er en 0-rad, dvs. $\underline{\underline{\alpha = 2}}$.

Da er systemet

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi løser nedenfra:

$z = s$

$y + z = 1 \Rightarrow y = 1 - z = 1 - s$

$x + y = 1 \Rightarrow x = 1 - y = 1 - (1 - s) = s$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ 1-s \\ s \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Oppgave 3

a) Kan gjøres både med substitusjon og delvis integrasjon

Substitusjon:

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int u\,du = \frac{1}{2}u^2 + C = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C.$$

$u = \ln x$

$du = \frac{1}{x}\,dx$

Delvis integrasjon:

$$I = \int \frac{\ln x}{x}\,dx = \ln x \cdot \ln x - \int \frac{\ln x}{x}\,dx = (\ln x)^2 - I + C$$

$u = \ln x \qquad v' = \frac{1}{x}$

$u' = \frac{1}{x} \qquad v = \ln x$

$$\Downarrow$$

$$I = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C.$$

b) Vi separerer variable

$$y^2\,dy = 2\,\frac{\ln x}{x}\,dx$$

Integrerer hver side:

$\int y^2\,dy = \frac{1}{3}y^3$ $\qquad$ $\int 2\frac{\ln x}{x}\,dx = (\ln x)^2 + C$

$$\frac{1}{3}y^3 = (\ln x)^2 + C$$

$$y^3 = 3(\ln x)^2 + C \qquad y(1) = 1 \Rightarrow C = 1$$

$$y = \sqrt[3]{3(\ln x)^2 + 1}$$

Oppgave 4.

Må delbrøksoppspalte

$$\frac{x-3}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$

$$A(x-2) + B(x-1) = x-3$$

$x=1$ gir $-A = -2 \Rightarrow A = 2$

$x=2$ gir $B = -1$

$$\int \frac{x-3}{(x-1)(x-2)}\,dx = \int \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x-2}\,dx$$

$$= 2\ln|x-1| - \ln|x-2| + C = \ln\left|\frac{(x-1)^2}{x-2}\right| + C$$

Oppgave 5

a) Karakteristisk ligning er

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

$$r = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$$

Generell løsning er

$$y = Ce^{x} + De^{2x}$$

b)
$$\left.\begin{aligned} y(0) &= C + D = 2 \\ y'(x) &= Ce^{x} + 2De^{2x} \\ y'(0) &= C + 2D = 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow C = D = 1$$

$$y = e^{x} + e^{2x}$$

Oppgave 6

Vi deler med x:

$$y' - \frac{2}{x} y = 1 + \frac{2}{x}$$

Integrerende faktor

$$m(x) = e^{\int -\frac{2}{x} dx} = e^{-2\ln|x|} = \frac{1}{|x|^2} = \frac{1}{x^2}$$

Multiplikasjon med $m(x)$ gir

$$\left(\frac{1}{x^2} y\right)' = \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}$$ Vi integrerer:

$$\frac{y}{x^2} = \int \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} dx = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + C$$

$$y = Cx^2 - x - 1$$ (Generell løsning)

$$y(1) = C - 1 - 1 = C - 2 = 0 \Rightarrow C = 2$$

$$y = 2x^2 - x - 1$$