UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Deleksamen i: MAT1001 — Matematikk 1.

Eksamensdag: Fredag 13. oktober 2017.

Tid for eksamen: 14:30 – 16:30.

Oppgavesettet er på 0 sider.

Vedlegg: Ingen.

Tillatte hjelpemidler: Ett tosidig A4-ark med valgfri tekst, håndskrevet eller trykt, samt godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

KANDIDATNR. ________

Oppgavesettet består av 17 flervalgsoppgaver med fem svaralternativ. Svarene avgis i svartabellen nedenfor. Det skal settes kun ett kryss for hver oppgave. Ikke avgitt svar regnes som galt svar og gir 0 poeng, det samme er tilfelle dersom det er satt flere kryss på samme oppgave. Hver oppgave gir 2 poeng for rett svar. Til sammen kan du oppnå 34 poeng. Kun arket med svartabellen skal leveres inn.

Oppgave	Alt. a)	Alt. b)	Alt. c)	Alt. d)	Alt. e)
1					X
2		X			
3	X				
4			X		
5		X			
6			X		
7			X		
8					X
9					X
10		X			
11					X
12				X	
13			X		
14		X			
15			X		
16		X			
17		X			

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 1. Løs likningssystemet

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ 7x + 4y &= 1 \end{aligned}$$

Vi er ute etter verdien til x.
a) 3 b) 5 c) 0 d) 7 e) -1

Oppgave 2. Et inhomogent lineært likningssystem er gitt ved

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ ax + 3y &= 2 \end{aligned}$$

hvor a er et reelt tall.For hvilken verdi av a har systemet uendelig mange løsninger?
a) 3 b) Ikke for noen verdi av a c) -1 d) 0 e) -3

Oppgave 3. Vi har gitt to 2×3-matriser

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Differansen $A - 2B$ er gitt ved
a) $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -1 & -4 & -4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ -1 & -4 & -4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -3 & -2 & -4 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & -6 \end{pmatrix}$
e)Gir ikke mening.

Oppgave 4. A og B er matrisene fra oppgave 3. Hva er AB ?
a) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ c) Gir ikke mening d) $\begin{pmatrix} -2 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$
e) $\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$

Oppgave 5. Regn ut determinanten til matrisen

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

a) $2 + 4a$ b)$2 + 2a$ c) $2 - 4a$ d) $1 - 2a$ e) $2 - 7a$

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 6. Regn ut den karakteristiske ligningen til matrisen

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

a) $\lambda^2 + \lambda = 1$ b) $\lambda^2 + \lambda - 4 = 0$ c) $\lambda^2 + \lambda = 0$ d) $-\lambda^2 - 3\lambda = 0$ e) $\lambda^2 = -2$

Oppgave 7. Hvilket av følgende tall er en egenverdi for matrisen

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) 2 b) 3 c) 1 d) 0 e) -1

Oppgave 8. En av disse vektorene er ***ikke*** egenvektor for matrisen

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Oppgave 9. Realdelen til det komplekse tallet $(1-2i)(2-3i)$ er

a) 8 b) -7 c) 2 d) 3 e) -4

Oppgave 10. Produktet $e^{i\frac{3\pi}{4}} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$ er lik
a) $e^{-\frac{3\pi^2}{16}}$ b) -1 c) $\sin(\pi)$ d) i e) $-\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i$

Oppgave 11. Regn ut $\frac{1+3i}{1+i}$

a) $1+2i$ b) 3 c) $2i$ d) $1+i^2$ e) $2+i$

Oppgave 12. Den kompakte polarformen til det komplekse tallet $z = -1+i$ er gitt ved
a) $-e^{i\frac{\pi}{2}}$ b) $-e^{i\pi} + e^{i\frac{\pi}{2}}$ c) $2e^{i\frac{3\pi}{4}}$ d) $\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ e) $\sqrt{2}\cos(\frac{3\pi}{2})$

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 13. En første ordens inhomogen lineær differensligning er gitt ved at $x_0 = 3$ og

$$x_{n+1} - \tfrac{1}{2}x_n = 1$$

Hva vil x_n nærme seg når n går mot uendelig ?

a) 3 b) 0 c) 2 d) Har ikke grense e) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

Oppgave 14. Hvilket av alternativene er en løsning til differensligningen

$$x_{n+1} - \tfrac{1}{2}x_n = n$$

a) $(\frac{1}{2})^n$ b) $2n - 4$ c) $(\frac{1}{2})^n + n$ d) $(-\frac{1}{2})^n + 2n - 4$ e) $2n$

Oppgave 15. Vi betrakter en første ordens inhomogen differenslikning

$$x_{n+1} - x_n = 2$$

med initialverdi $x_0 = 2$. Det gir at x_{50} er lik

a) 100 b) 2^{50} c) 102 d) 2^{49} e) $(-1)^{50} + 2$

Oppgave 16. Vi betrakter en andre ordens homogen differenslikning

$$x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 0$$

med initialverdier $x_0 = 2$ og $x_1 = 3$. Det gir at x_7 er lik

a) 64 b) 129 c) -127 d) 65 e) 128

Oppgave 17. Vi betrakter en andre ordens homogen differenslikning

$$x_{n+2} - \sqrt{3}x_{n+1} + x_n = 0$$

med initialverdier $x_0 = 1$ og $x_1 = 1$. Det gir at x_{12} er lik

a) 0 b) 1 c) -1 d) $\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}$ e) $\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}$

SLUTT.

(Fortsettes på side 5.)

FASIT MIDTVEISEKSAMEN.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -7R_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ :-3 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$y = 2, \quad x + y = 1 \Rightarrow x = -1$ (e)

2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -aR_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3-a & 2-a \end{pmatrix}$

Siste rad er aldri en 0 rad, altså (b)

3. $A - 2B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -1 & -4 & -4 \end{pmatrix}$

altså (a)

4. A og B er begge 2×3 matriser og kan ikke ganges sammen. Altså (c)

5. $\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ a & 1 \end{vmatrix} - a \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

$= (2 - a(-3)) - a(1 - 0) = 2 + 3a - a = 2 + 2a$ (b)

6. $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-2-\lambda) - (-1)2 =$

$-2 - \lambda + 2\lambda + \lambda^2 + 2 = \lambda^2 + \lambda = 0$ altså (c)

7. $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$

$$\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$$ altså (c)

8. Kan ikke være a, b, c eller d siden $c = 2a$ og $b = -2d$. Vi sjekker:

$$Q\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2 \\ -1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

som ikke er multiplum av $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Altså (e)

9. $(1-2i)(2-3i) = 2 - 3i - 4i + 6i^2 = -4 - 7i$

altså (e)

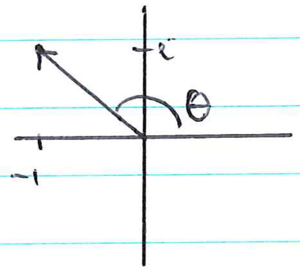
10. $e^{i\frac{3\pi}{4}} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{i\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right)} = e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1.$

(b)

11. $\dfrac{1+3i}{1+i} = \dfrac{(1+3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{1 - i + 3i - 3i^2}{1 - i^2} =$

$\dfrac{4 + 2i}{2} = 2 + i$, altså (e)

12.



$\rho = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{a}{\rho} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2} \Rightarrow \theta = \frac{3}{4}\pi$

$z = \sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$ (d)

13. Spesiell løsning $x_n^p = A$ ③

$$x_{n+1}^p - \frac{1}{2}x_n^p = A - \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}A = 1 \Rightarrow A = 2$$

Generell løsning $x_n = C\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2$

$$x_0 = C + 2 = 3 \Rightarrow C = 1. \text{ Løsning } x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 2$$

(c)

14. Spesiell løsning $x_n^p = An + B$.

$$x_{n+1}^p - \frac{1}{2}x_n^p = A(n+1) + B - \frac{1}{2}(An+B) = \frac{1}{2}An + \left(A + \frac{1}{2}B\right) = n$$

$\frac{1}{2}A = 1 \Rightarrow A = 2$ $\quad A + \frac{1}{2}B = 0 \Rightarrow B = -4$

Generell løsning

$$x_n = C\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 4$$

Bare (b) er på denne formen med $C = 0$.

15. Spesiell løsning $x_n^p = An$ (siden $r = 1$)

$$x_{n+1}^p - x_n^p = A(n+1) - An = A = 2$$

Generell løsning $x_n = C\cdot(1)^n + 2n$

$$x_0 = C = 2 \Rightarrow x_n = 2 + 2n$$

$x_{50} = 2 + 100 = 102$ altså (c)

16. Karakteristisk ligning $r^2 - 3r + 2 = 0$

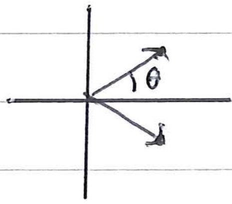
$$r = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$$

Generell løsning $x_n = C\cdot 1^n + D\cdot 2^n$

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= C + D = 2 \\ x_1 &= C + 2D = 3 \end{aligned}\right\} C = D = 1 \qquad x_n = 1 + 2^n$$

$x_7 = 1 + 2^7 = 1 + 128 = 129$ (b)

17. Karakteristisk ligning $r^2 - \sqrt{3}\,r + 1 = 0$



$$r = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{3-4}}{2} = \frac{\sqrt{3} \pm i}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \pm \frac{1}{2} i$$

$\rho = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$ $\cos\theta = \frac{a}{\rho} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \Rightarrow \theta = 30^\circ = \frac{\pi}{6}.$

Generell lösning $x_n = C \cos n\frac{\pi}{6} + D \sin n\frac{\pi}{6}$

$x_0 = C = 1$ $x_1 = C \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} + D \cdot \frac{1}{2} = 1$

$x_{12} = C \cos 2\pi + D \sin 2\pi = C = 1$, altså (b)

Total fasit:

EBACBCCEE BEDCBCBB