A13: 1,2
B3: 7,10,25

13.1: Befolkningsveksten i et land: 2% årlig
Netto innvandring er på: 40 000 årlig.

Difflikning for dette:
Setter $y(t)$ = antall personer ved tiden t (målt i år). Initialverdi: $y(0) = 2\ 000\ 000$.

For kontinuerlig økning og nedgang, jevn/momentant.

$$\underbrace{y'(t)}_{\text{Jevn forandring (per år) ved tiden } t} = 0.02\,y(t) + \underbrace{40\ 000}_{\text{netto innvandring}}$$

prosentvis vekst	$\frac{2}{100} = 0.02$

$y' = 0.02y + 40000$, $y(0) = 2\ 000\ 000$.

(*) $y' - 0.02y = 40\ 000$.

·) Homogen likning: $y' - 0.02y = 0$
$y = Ce^{0.02t}$ Generell løsning.

$\boxed{y' = ry \text{ har generell løsning } y = Ce^{rt}.}$

·) Partikulærløsning: Kan prøve: $y = A$, A konstant.
$y' = 0 \Rightarrow$ likningen (*) blir: $0 - 0.02A = 40000$

$$\frac{-0.02A}{-0.02} = \frac{40\ 000}{-0.02}$$

$A = -2\ 000\ 000$

$y_h = Ce^{0.02t}$, $y_p = -2\ 000\ 000$

Generell løsning: $y = y_h + y_p = \boxed{Ce^{0.02t} - 2\ 000\ 000.}$

Initialverdi: $y(0) = 2\ 000\ 000.$

$y(0) = Ce^{0.02\cdot 0} - 2\ 000\ 000$
$= C - 2\ 000\ 000$

$C - 2000000 = 2\ 000\ 000$
$C = 4\ 000\ 000.$

$\Rightarrow$ $y(t) = 4\ 000\ 000e^{0.02t} - 2\ 000\ 000.$

$$\boxed{\begin{aligned} y(1) &= 2\ 081\ 000 \\ y(2) &= 2\ 163\ 240 \end{aligned}}$$

13.2: 10 millioner tonn med søppel på en lagringsplass, ved tiden $t = 0$.

200 000 tonn med skadelig stoff, brytes ned med en jevn fart på 5% per år.

a) $y(t)$ = prosentandel skadelig stoff ved tiden t.

Løser for $y(t)$: Setter opp en difflikning:

$$\boxed{y' = \underbrace{-0.05}_{\text{prosentvis nedgang}} y}$$

Initialverdi:

$$y(0) = \frac{\text{skadelig stoff}}{\text{Total}} \cdot 100\%$$

$$= \frac{200\,000}{10\,000\,000} \cdot 100\%$$

$$\boxed{y(0) = 2\%}$$

Generell løsning: $y(t) = Ce^{-0.05t}$

$$y(0) = Ce^{-0.05 \cdot 0} = C$$

$$\Rightarrow C = 2$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y(t) = 2e^{-0.05t}}}$$

b) Søppelet blir overført til en ny lagringsplass, med jevn tilførsel på $\frac{1}{2}$ millioner tonn per år.

La $z(t)$ = antall millioner tonn med skadelig stoff på den nye plassen.

Her brytes det skadelige stoffet ned med en jevn hastighet på 10%.

Forklar at $z'(t) = -0.1z(t) + 0.01e^{-0.05t}$, $z(0) = 0$

•) $z' = -0.1z + 0.01e^{-0.05t}$

$-0.1z$: jevn nedgang med prosentfaktor på $\frac{10}{100} = 0.1$

$0.01e^{-0.05t}$: jevn tilgang av skadelig stoff fra den gamle plassen.

Initialverdi:

$z(0) = 0$ fordi plassen er opprinnelig tom.

$$\boxed{y(t) = 2e^{-0.05t} = \text{prosentandel.}}$$

Jevn tilstrøm på $\frac{1}{2}$ million årlig til den nye plassen.

Jevn tilstrøm av skadelig stoff er

$$\frac{y(t)}{100} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\cancel{2}e^{-0.05t}}{100} \cdot \frac{1}{\cancel{2}}$$

$$= 0.01e^{-0.05t}.$$

c) Vis at $z(t) = \frac{1}{5}e^{-0.05t} - \frac{1}{5}e^{-0.1t}$.

(*) $z' = -0.1z + \underline{0.01e^{-0.05t}}$, $z(0) = 0$

•) Homogen likning: $\boxed{z' = -0.1z}$

Generell løsning: $\boxed{z = Ce^{-0.1t}}$.

•) Partikulær løsning: $z = Ae^{-0.05t}$.

$u = -0.05t$

$u' = -0.05$

$z' = A(-0.05)e^{u} = -0.05Ae^{-0.05t}$.

Setter inn i (*):

$$-0.05A\cancel{e^{-0.05t}} = -0.1 \cdot A\cancel{e^{-0.05t}} + 0.01\cancel{e^{-0.05t}}$$

$$-0.05A = -0.1A + 0.01.$$

$$-0.05A + 0.1A = 0.01$$

$$0.05A = 0.01$$

$$A = \frac{0.01}{0.05} = \frac{1}{5}.$$

(Funker som partikulærløsning)

Generell løsning:

$$z = z_h + z_p = Ce^{-0.1t} + \frac{1}{5}e^{-0.05t}$$

Initialverdi: $z(0) = 0$.

$$z(0) = C + \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow C + \frac{1}{5} = 0$$

$$\Rightarrow C = -\frac{1}{5}$$

$$\underline{\underline{z = -\frac{1}{5}e^{-0.1t} + \frac{1}{5}e^{-0.05t}}}$$

B3.7: La $N(t)$ = antall individer i en dyrepopulasjon ved tiden t målt i år.

Anta $N(t)$ oppfyller likningen

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = a(B-N), \quad a,\ B>0.$$

$$\frac{1}{N}\cdot N' = a(B-N).$$

a) Anta ~~at populasjonen har en~~ relativ vekstrate på 10 : $\frac{N'(t)}{N(t)}$ = relativ vekstrate ved tiden t.

Anta at det 1100 dyr ved et gitt tidspunkt. Hva er den totale vekstraten ved dette tidspunktet.

$N'(t)$

La $N(t_0)=1100$. $\underbrace{\frac{N'(t_0)}{N(t_0)}}_{\text{Relativ vekstrate}} = 10.$ | t_0 er det gitte tidspunktet.

$N'(t_0)$ = totale vekstraten ved $t=t_0$.

$$\frac{N'(t_0)}{1100} = 10 \Rightarrow N'(t_0) = 11000$$

b) Finn den generelle løsningen til

$$\frac{1}{N}\cdot N' = a(B-N). \quad \left(\text{Separabel difflikning}\right)$$

Del på $B-N$:

$$\underbrace{\frac{1}{N(B-N)}\cdot N'}_{\text{kun }N\text{'er}} = \underbrace{a}_{\text{kun en funksjon av }t.}$$

Integrerer begge sider: $\int \frac{1}{N(B-N)} N'\,dt = \int a\,dt$

$\boxed{N'dt = \frac{dN}{dt}dt = dN}$

$$\underbrace{\int \frac{1}{N(B-N)}\,dN}_{I_1} = \underbrace{\int a\,dt.}_{I_2}$$

$\boxed{I_2 = at + C.}$

Delbrøksoppspalting: $\frac{1}{N(B-N)} = \frac{r}{N} + \frac{s}{B-N} \quad \Big|\cdot N(B-N)$

$$1 = r(B-N) + sN$$
$$1 = rB - rN + sN$$
$$1 = \underbrace{rB}_{=1} + N\underbrace{(-r+s)}_{=0}$$

•) $rB=1$, $-r+s=0$

$r = \frac{1}{B}$ $\quad s = r = \frac{1}{B}.$

$$\frac{1}{N(B-N)} = \frac{\frac{1}{B}}{N} + \frac{\frac{1}{B}}{B-N} = \frac{1}{BN} + \frac{1}{B(B-N)}.$$

$$I = \int \frac{1}{N(B-N)}\,dN = \int \frac{1}{BN} + \frac{1}{B(B-N)}\,dN$$

$$= \frac{1}{B}\int\frac{1}{N}\,dN + \underbrace{\frac{1}{B}\int\frac{1}{B-N}\,dN.}_{I_3}$$

$$\boxed{= \frac{1}{B}\ln(N) + \frac{1}{B}I_3.}$$

$I_3 = \int \frac{1}{B-N}\,dN$ | $u = B-N.$ | variabelen her er N

$= \int \frac{1}{u}(-du)$ | $\frac{du}{dN} = -1$, $du = -dN$, $-du = dN$

$= -\int \frac{1}{u}\,du$

$= -\ln|u|$ (har konstant C på høyre side)

$= -\ln|B-N|.$

$\Rightarrow$ $I = \frac{1}{B}\ln(N) + \frac{1}{B}\left(-\ln|B-N|\right)$

$I = \frac{1}{B}\left(\ln(N) - \ln|B-N|\right)$

$= \frac{1}{B}\ln\left(\frac{N}{|B-N|}\right)$ $\quad \left(\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)\right)$

$I = at + C$ (likningen over)

$\frac{1}{B}\ln\left(\frac{N}{|B-N|}\right) = at + C \quad \Big|\cdot B$

$\ln\left(\frac{N}{|B-N|}\right) = Bat + BC \quad \Big|$ opphøyer i e

$\frac{N}{|B-N|} = e^{Ba\cdot t + BC} \quad \Big|\ e^{\ln(a)} = a.$

Anta at $N(t) < B$, slik at $B-N>0$.

$$\frac{N}{B-N} = e^{Ba\cdot t + BC}.$$

$$\frac{N}{B-N} = e^{Ba\cdot t + BC} \Big| \cdot B-N \quad \left(\text{Løsen for } N\right)$$

$$N = (B-N)e^{Bat+BC}$$

$$N = Be^{Bat+BC} - Ne^{Bat+BC}$$

$$N + Ne^{Bat+BC} = Be^{Bat+BC}$$

$$\frac{N\cancel{(1+e^{Bat+BC})}}{\cancel{1+e^{Bat+BC}}} = \frac{Be^{Bat+BC}}{1+e^{Bat+BC}}$$

$$\underbrace{N = \frac{Be^{Bat+BC}}{1+e^{Bat+BC}}}_{\text{Generell løsning.}}$$

Hvis $a=0$, da er

$$N = \frac{Be^{BC}}{1+e^{BC}}.$$ Konstant løsning.

c) Ved tiden $t=0$ så er populasjonen på 1000.
$N(0) = 1\,000.$
Bærekapasiteten er på 2000.

Etter ti år er populasjonen på 1500.
$N(10) = 1500.$ Regn ut a.

Bærekapasitet = antall individer som må til for at veksten skal bli 0.

$\frac{N'}{N} = a(B-N)$: utifra dette: $N' = 0$ kun når $N = B$.

$\Rightarrow B$ = bærekapasiteten $= 2\,000.$

$$N(t) = \frac{Be^{B\cdot at+BC}}{e^{Bat+BC}+1},$$

$B = 2\,000$
$N(0) = 1\,000$
$N(10) = 1500.$

$$N(t) = \frac{Be^{B\cdot at + BC}}{e^{Bat+BC}+1}, \quad B = 2000, \quad N(0) = 1000, \quad N(10) = 1500.$$

$$N(0) = \frac{Be^{BC}}{e^{BC}+1} = 1000 \quad \Big| \; e^{BC}+1$$

$$Be^{BC} = 1000(e^{BC}+1) = 1000e^{BC} + 1000.$$

$$e^{BC}(B - 1000) = 1000$$

$$e^{BC} = \frac{1000}{B-1000} = \frac{1000}{2000-1000} = \frac{1000}{1000} = 1.$$

$$e^{BC} = 1.$$

$$N(t) = \frac{Be^{B\cdot at + BC}}{e^{Bat+BC}+1} = \frac{Be^{Bat}\cdot e^{BC}}{e^{Bat}\cdot e^{BC}+1} \quad \Big| \; e^{a+b} = e^a \cdot e^b$$

$$= \frac{Be^{Bat}}{e^{Bat}+1}$$

$N(10) = 1500$, $B = 2000$.

$$\frac{Be^{Ba\cdot 10}}{e^{Ba\cdot 10}+1} = 1500. \quad \Big| \cdot e^{Ba\cdot 10}+1$$

$$\boxed{a = \frac{\ln(3)}{10} \approx 0.11}$$ etter litt algebra...