2.12 Regn ut determinantene:

a) $\det\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = 1\cdot 1 - 0\cdot 0 = 1.$

(Husk: $\det\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix} = ad - bc$)

b) $\det\begin{bmatrix}15 & 2\\ 0 & 8\end{bmatrix} = 15\cdot 8 - 2\cdot 0 = 120.$

c) $\det\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 2\end{bmatrix} = 2\cdot\det\begin{bmatrix}3 & 4\\ 4 & 2\end{bmatrix} - \cancel{0\cdot\det\begin{bmatrix}1 & 4\\ 1 & 2\end{bmatrix}} + \cancel{0\cdot\det\begin{bmatrix}1 & 3\\ 1 & 4\end{bmatrix}}$

$= 2(3\cdot 2 - 4\cdot 4)$
$= 2(6-16)$
$= 2(-10)$
$= \underline{\underline{-20}}$

d) $\det\begin{bmatrix}30 & 2\\ -40 & 4\end{bmatrix} = 30\cdot 4 + 2\cdot(+40)$
$= 120 + 80$
$= \underline{\underline{200}}$

3.3 Løs likningssystemene med Gauss-eliminasjon.

a) $\begin{cases} x + y + z = 8\\ 2x - y = 4\\ x - y + 3z = 2.\end{cases}$

Må finne den utvidede matrisen. $[A \; b]$

$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 8\\ 2 & -1 & 0 & 4\\ 1 & -1 & 3 & 2\end{bmatrix}$ Inhomogent system. $b = \begin{pmatrix}8\\4\\2\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

Radoperasjoner:
1) Gange med en konstant. $\neq 0$
2) Bytte om på to rader
3) Legge til et multippel av en annen rad.

Mål: få matrisen på formen
$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & a\\ 0 & 1 & 0 & b\\ 0 & 0 & 1 & c\end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{matrix}x = a\\ y = b\\ z = c\end{matrix}$

$\begin{array}{c} R_1\\ R_2\\ R_3\end{array}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 8\\ 2 & -1 & 0 & 4\\ 1 & -1 & 3 & 2\end{pmatrix} \sim^{-2R_1} \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 8\\ 0 & -3 & -2 & -12\\ 1 & -1 & 3 & 2\end{bmatrix} \sim^{\cdot(-1)}_{-R_1} \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 8\\ 0 & 3 & 2 & 12\\ 0 & -2 & 2 & -6\end{bmatrix}$

$\sim_{(-\frac{1}{2})} \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 8\\ 0 & 3 & 2 & 12\\ 0 & 1 & -1 & 3\end{bmatrix} \sim^{-3R_3} \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 8\\ 0 & 0 & 5 & 3\\ 0 & 1 & -1 & 3\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 8\\ 0 & 1 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 5 & 3\end{bmatrix}$

Legge $-3R_3$ til $R_2$. $-3R_3 = (0\;-3\;3\;-9)$
$+$
$R_2 = (0\;3\;2\;12)$

$(\cdot\frac{1}{5})\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 8\\ 0 & 1 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{5}\end{bmatrix} \sim^{+R_3} \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 8\\ 0 & 1 & 0 & \frac{18}{5}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{5}\end{bmatrix}$ — $3 + \frac{3}{5} = \frac{3\cdot 5 + 3}{5} = \frac{15+3}{5} = \frac{18}{5}$

$\sim^{-R_2} \begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & \frac{22}{5}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{18}{5}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{5}\end{bmatrix} \sim^{-R_3} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \frac{19}{5}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{18}{5}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{5}\end{bmatrix}$

$8 - \frac{18}{5} = \frac{8\cdot 5 - 18}{5} = \frac{40-18}{5} = \frac{22}{5}$

$x = \frac{19}{5},\; y = \frac{18}{5},\; z = \frac{3}{5}.$

Sjekk svaret!