3.7 Hvilke verdier av a får vi 0, 1 eller ∞ mange løsninger?

A er koeffisientmatrisen

$$\begin{cases} x+2y-3z = 4 \\ 3x-y+5z = 2 \\ 4x+y+(a^2-14)z = a+2 \end{cases}$$

(3 likninger, 3 variable, $Ax=b$, 3×3-matrise)

Inhomogent system (for alle a)

0 eller ∞ mange løsninger hvis $\det A = 0$

1 løsning hvis $\det A \neq 0$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & a^2-14 \end{bmatrix}$$

$$\det A = 1\cdot\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & a^2-14 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & a^2-14 \end{vmatrix} + (-3)\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1\left((-1)(a^2-14) - 5\cdot 1\right) - 2\left(3(a^2-14) - 5\cdot 4\right) - 3\left(3\cdot 1 - (-1)4\right)$$

$$= \left(-a^2+14-5\right) - 2\left(3a^2-42-20\right) - 3(7)$$

$$= \left(-a^2+9\right) - 2\left(3a^2-62\right) - 21$$

$$= -a^2+9-6a^2+124-21$$

$$= -7a^2+112$$

$\det A = -7a^2+112$.

Løser likningen $\det A = 0$:

$$-7a^2+112 = 0$$
$$-7a^2 = -112$$
$$7a^2 = 112$$
$$a^2 = \frac{112}{7}$$
$$a^2 = 16$$
$$a = \pm\sqrt{16}$$
$$a = \pm 4$$

To løsninger: $a = 4$ og $a = -4$

$\det A = 0$ hvis og bare hvis $a = 4$ eller $a = -4$.

$\det A \neq 0$ når $a \notin \{-4, 4\}$, dvs $a \neq 4$ og $a \neq 4$.

En løsning når $a \notin \{-4, 4\}$.

Sjekker $a = 4$ og $a = -4$:

$a = 4$:

$$\begin{cases} x+2y-3z = 4 \\ 3x-y+5z = 2 \\ 4x+y+\underbrace{(a^2-14)}_{4^2-14}z = \underbrace{a+2}_{4+2} \end{cases}$$

Utvidet matrise:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} \sim R_2 - 3R_1 \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 7 & -14 & 10 \\ 4 & 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} (-1)$$

$$\begin{array}{l} R_2\ 3\ -1\ 5\ 2 \\ -3R_1\ -3\ -6\ 9\ -12 \\ \hline = \ 0\ -7\ 14\ -10 \end{array} \cdot(-1) \Bigg| \sim R_3 - 4R_1 \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 7 & -14 & 10 \\ 0 & 7 & -14 & 10 \end{bmatrix} (-1)$$

(2. og 3. like)

$$\begin{array}{l} R_3\ 4\ 1\ 2\ 6 \\ -4R_1\ -4\ -8\ 12\ -16 \\ \hline = \ 0\ -7\ 14\ -10 \end{array} \cdot(-1) \sim R_3 - R_2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 7 & -14 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \frac{1}{7}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & \frac{10}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{Trappeform}}$$

Har løsninger (∞ mange, siden z er en fri variabel.)

$a = 4$: ∞ mange løsninger.

$a = -4$: får 0 løsninger....