4.1

$$A = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & 7 \\ -\frac{1}{3} & -2 \end{bmatrix}$$ Finn egenverdien og egenvektorer.

Løse den karaktæristiske likningen.

$\det(A-\lambda I) = 0$

$$A-\lambda I = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & 7 \\ -\frac{1}{3} & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3}-\lambda & 7 \\ -\frac{1}{3} & -2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I) = \det\begin{bmatrix} \frac{4}{3}-\lambda & 7 \\ -\frac{1}{3} & -2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= \left(\frac{4}{3}-\lambda\right)(-2-\lambda) - 7\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{4}{3}(-2-\lambda) - \lambda(-2-\lambda) + \frac{7}{3}$$

$$= \frac{-8}{3} - \frac{4}{3}\lambda + 2\lambda + \lambda^2 + \frac{7}{3}$$

$$= \lambda^2 + 2\lambda - \frac{4}{3}\lambda + \frac{7}{3} - \frac{8}{3}$$

$$= \lambda^2 + \underbrace{\left(2-\frac{4}{3}\right)}_{\frac{2\cdot 3-4}{3} = \frac{6-4}{3} = \frac{2}{3}}\lambda - \frac{1}{3}$$

$$\det(A-\lambda I) = \lambda^2 + \frac{2}{3}\lambda - \frac{1}{3}$$

$$\lambda^2 + \frac{2}{3}\lambda - \frac{1}{3} = 0. \xrightarrow[\text{gir}]{\text{abc-formel}} \lambda = \frac{1}{3},\ \lambda = -1.$$

Egenverdiene er $\lambda_1 = \frac{1}{3}$, $\lambda_2 = -1$.

Egenvektorene: Må løse $Ax = \lambda x$ for $\lambda = \frac{1}{3}$, $\lambda = -1$.

$(A-\lambda I)x = 0$.

$$A-\lambda I = \begin{bmatrix} \frac{4}{3}-\lambda & 7 \\ -\frac{1}{3} & -2-\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3}+1 & 7 \\ -\frac{1}{3} & -2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{3} & 7 \\ -\frac{1}{3} & -1 \end{bmatrix}.$$

Utvidede matrisen

$$\begin{bmatrix} \frac{7}{3} & 7 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -1 & 0 \end{bmatrix}. \xrightarrow{\text{løser}} \text{egenvektoren til } \lambda_2 = -1.$$