A4: 6ac, 7
A5: 2abghi, 3abc, 6

4.6 Egenverdier og egenvektor

For hver av matrisene

a) $M = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ og c) $M = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 6 & -8 \end{bmatrix}$

1) Skrive vektoren $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ som en lineærkombinasjon av egenvektorene til M.

2) La M beskrive populasjons-dynamikkproblemet $\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$ med initial vektor $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.
Finn et uttrykk for x_n og y_n.

---

a) $M = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$. Finner egenverdiene.

Karakteristisk likning: $\det(M - \lambda I) = 0$.

$$\det(M-\lambda I) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 \\ -2 & -3-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)(-3-\lambda) - 2\cdot(-2)$$
$$= 2(-3-\lambda) - \lambda(-3-\lambda) + 4$$
$$= -6 - 2\lambda + 3\lambda + \lambda^2 + 4$$
$$= \lambda^2 + \lambda - 2$$

$\boxed{\lambda^2 + \lambda - 2 = 0}$ $\xrightarrow{abc}$ $\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-2)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \rightsquigarrow 1, -2.$

Karakteristisk likning

$\boxed{\lambda^2 + \lambda - 2}$ karakteristisk polynom.

Egenverdiene er $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = -2$.
Finner egenvektorene.

$\lambda_1 = 1$ | For å finne egenvektoren v_1, bruker vi den utvidede matrisen $[M - \lambda_1 I \;\; 0]$.

$$[M - I \;\; 0] = \begin{bmatrix} 2-1 & 2 & 0 \\ -2 & -3-1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Radreduserer:

$$\begin{array}{c} \\ R_2 + 2R_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

R_2	-2	-4	0
$2R_1$	2	4	
	0	0	

Dette gir $x_1 + 2x_2 = 0$.
$x_1 = -2x_2$.

x_2 er en fri variabel. La $t = x_2$.
$x_1 = -2t$.

Dette gir $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2t \\ t \end{bmatrix} = t \underbrace{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{egenvektoren } v_1}$.

faktoriserer ut t

$$v_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$\lambda_2 = -2$: $[M - \lambda_2 I \;\; 0] = [M + 2I \;\; 0]$.

$$\begin{bmatrix} 2+2 & 2 & 0 \\ -2 & -3+2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim^{R_1 + 2R_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

R_1	4	2	0
$2R_2$	-4	-2	0
$=$	0	0	0

Dette gir $x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 0$.
$x_1 = -\frac{1}{2}x_2$

x_2 er en fri variabel. La $t = x_2$.
$x_1 = -\frac{1}{2}t$. $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$.

Kan gange $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ med 2 (eller hva som helst $\neq 0$.) og få en ny egenvektor:

$$v_2 = 2\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$v_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

1) Skriv $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ som en lin. komb. av v_1 og v_2.

$\underbrace{k_1 v_1 + k_2 v_2}$ $= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ må løses. Dette har utvidet matrise

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\ v_1 \quad v_2 \end{array} \sim^{R_1 + 2R_2} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim^{(\frac{1}{3})} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

R_1	-2	-1	1
$2R_2$	2	4	2
$=$	0	3	3

$$\sim^{R_1 - 2R_2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{redusert trappeform}}$$

R_1	1	2	1
$-2R_2$	0	-2	-2
$=$	1	0	-1

$k_1 = -1$ og $k_2 = 1$.

$k_1 v_1 + k_2 v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. $-v_1 + v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\left(-\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

2) $\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$ m. $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Finn x_n og y_n.
1) Finn egenverdien ✓
2) Finn egenvektorene ✓ | $u_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$
3) Løs "initialkoeffisienter" for $k_1 v_1 + k_2 v_2 = u_0$ ✓
4) Da er $\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = k_1 \lambda_1^n v_1 + k_2 \lambda_2^n v_2$.

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = (-1)\cdot 1^n \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + 1\cdot(-2)^n \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$
$$= -\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + (-2)^n \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(-2)^n \\ 2\cdot(-2)^n \end{bmatrix}.$$
$$= \begin{bmatrix} 2 - (-2)^n \\ -1 + 2(-2)^n \end{bmatrix}.$$

$\Rightarrow$ $x_n = 2 - (-2)^n$, og $y_n = -1 + 2(-2)^n$.