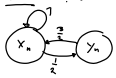
4.7 Her en populasjon av unge og gamle individer.

Unge: X_n ved tid n | Tilstandsvektor $U_n = \begin{bmatrix} X_n \\ Y_n \end{bmatrix}$

Gamle: Y_n

Anta at $\begin{cases} X_{n+1} = X_n + \frac{3}{2} Y_n \\ Y_{n+1} = \frac{1}{2} X_n \end{cases}$

Dynamikkdiagram:



a) Finn en 2×2-matrise M s.a. $\begin{bmatrix} X_{n+1} \\ Y_{n+1} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} X_n \\ Y_n \end{bmatrix}$. Finn egenverdiene og egenvektorene til M.

$\begin{aligned} X_{n+1} &= 1 \cdot X_n + \tfrac{3}{2} Y_n \\ Y_{n+1} &= \tfrac{1}{2} X_n + 0 \cdot Y_n \end{aligned}$ $\quad M = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ er overgangsmatrisen.

Karakteristisk likning:

$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda) - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}$

$= -\lambda + \lambda^2 - \frac{3}{4}$

$= \lambda^2 - \lambda - \frac{3}{4}$

$\lambda^2 - \lambda - \frac{3}{4} = 0 \overset{abc}{\rightsquigarrow} \lambda = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(\frac{-3}{4})}}{2}$

$= \frac{1 \pm \sqrt{1+3}}{2}$

$= \frac{1 \pm \sqrt{4}}{2}$

$= \frac{1 \pm 2}{2} = \frac{3}{2}$ eller $\frac{-1}{2}$

Egenverdiene er $\lambda_1 = \frac{3}{2}$ og $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$.

Egenvektorene: $\begin{bmatrix} M - \lambda I & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M - \frac{3}{2} I & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1-\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0-\frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix}$ (En rad er et multiplum av den andre.)

$\sim \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad (R_2 = -R_1)$

$\sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad X_1 - 3X_2 = 0$, $X_1 = 3X_2$.

$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3X_2 \\ X_2 \end{bmatrix} = X_2 \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{egenvektor}}$ $\quad V_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = -\frac{1}{2}$: $\begin{bmatrix} M - \lambda_2 I & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M + \frac{1}{2} I & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1+\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0+\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ $\quad (3R_2 = R_1)$

$\sim \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\sim \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad X_1 + X_2 = 0$, $X_1 = -X_2$.

$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -X_2 \\ X_2 \end{bmatrix} = X_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad V_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$V_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $V_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda_1 = \frac{3}{2}$ $\quad \lambda_2 = -\frac{1}{2}$

b) La $\begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \end{bmatrix}$. $\left(\begin{bmatrix} X_{n+1} \\ Y_{n+1} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} X_n \\ Y_n \end{bmatrix} \right)$

Finn et uttrykk for $\begin{bmatrix} X_n \\ Y_n \end{bmatrix}$.

1) egenverdier ✓
2) egenvektorer ✓
3) "initialbbetingelsene"
4) En formel for løsning

$k_1 V_1 + k_2 V_2 = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix}$ $\quad M$ i likning.

$k_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 9 \\ 1 & 1 & 8 \end{bmatrix} \sim R_1 - 3R_2 \begin{bmatrix} 0 & -4 & -20 \\ 1 & 1 & 8 \end{bmatrix}$

$R_1: \ 3 \ -1 \ 9$
$-3R_2: \ -3 \ -3 \ -24$
$= \ 0 \ -4 \ -20$

$\sim -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 8 \end{bmatrix} \sim R_2 - R_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

$k_1 = 3$ og $k_2 = 5$. 3) ✓

4) $\begin{bmatrix} X_n \\ Y_n \end{bmatrix} = k_1 \lambda_1^n V_1 + k_2 \lambda_2^n V_2$.

$V_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $V_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda_1 = \frac{3}{2}$ $\quad \lambda_2 = -\frac{1}{2}$

$\begin{bmatrix} X_n \\ Y_n \end{bmatrix} = 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + 5 \left(-\frac{1}{2}\right)^n \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 3 \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot 3 \\ 3 \left(\frac{3}{2}\right)^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 5 \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} X_n \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \left(\frac{3}{2}\right)^n - 5 \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 3 \left(\frac{3}{2}\right)^n + 5 \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{bmatrix}$

$= \begin{matrix} 3 \left(\frac{3}{2}\right)^n + 5 \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ = 3 \cdot \frac{3^n}{2^n} + 5 \cdot \frac{(-1)^n}{2^n} \\ = \frac{3 \cdot 3^n + 5(-1)^n}{2^n} \end{matrix}$