B.1:16] Finn egenverdiene og egenvektorene til

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{9} \\ \frac{5}{9} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

mer kommer...

Karakteristisk likning:

$$\det \begin{bmatrix} \frac{1}{2}-\lambda & \frac{5}{9} \\ \frac{5}{9} & \frac{1}{2}-\lambda \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{2}-\lambda\right)^2 - \left(\frac{5}{9}\right)^2.$$

$$\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)^2 - \left(\frac{5}{9}\right)^2 = 0.$$

$$\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)^2 = \left(\frac{5}{9}\right)^2 \quad \left(\sqrt{}\right.$$

$$\frac{1}{2}-\lambda = \pm\frac{5}{9}.$$

$$-\lambda = \pm\frac{5}{9} - \frac{1}{2}$$

$$\lambda = \mp\frac{5}{9} + \frac{1}{2}$$

$$\lambda_1 = -\frac{5}{9}+\frac{1}{2} = -\frac{1}{18}. \quad \lambda_2 = \frac{5}{9}+\frac{1}{2} = \frac{19}{18}.$$

$\lambda_1 = -\frac{1}{18}$, $\lambda_2 = \frac{19}{18}$.

Brøkregning

$\lambda_1 = -\frac{1}{18}$:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}+(+\frac{1}{18}) & \frac{5}{9} & 0 \\ \frac{5}{9} & \frac{1}{2}+(+\frac{1}{18}) & 0 \end{bmatrix} = \underset{R_2-R_1}{\begin{bmatrix} \frac{5}{9} & \frac{5}{9} & 0 \\ \frac{5}{9} & \frac{5}{9} & 0 \end{bmatrix}}$$

$$\overset{\cdot\frac{9}{5}}{\sim} \begin{bmatrix} \frac{5}{9} & \frac{5}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 &= -x_2. \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow V_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_2 = \frac{19}{18}$:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}-\frac{19}{18} & \frac{5}{9} & 0 \\ \frac{5}{9} & \frac{1}{2}-\frac{19}{18} & 0 \end{bmatrix} = \underset{R_2+R_1}{\begin{bmatrix} -\frac{5}{9} & \frac{5}{9} & 0 \\ \frac{5}{9} & -\frac{5}{9} & 0 \end{bmatrix}}$$

$$\overset{\cdot(-\frac{9}{5})}{\sim} \begin{bmatrix} -\frac{5}{9} & \frac{5}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} x_1 - x_2 &= 0. \\ x_1 &= x_2. \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

En populasjon er delt inn i to grupper:
Immune, og mottakelige (for en sykdom).
X_n = antall immune ved år $10n$. (0,10,20,30).
Y_n = antall mottakelige ved år $10n$.

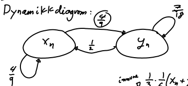
x_n { Av de som er immune, vil $\frac{4}{9}$ fortsatt være immune, 10 år senere. $\frac{1}{9}$ døde, og $\frac{4}{9}$ (resten) blir mottakelige.

y_n { Av de som er mottakelige, vil $\frac{1}{2}$ bli immune 10 år senere, $\frac{1}{9}$ døde, og $\frac{7}{18}$ (resten) mottakelige.

{ 10 år senere, får vi en tilførsel av individer. Tilskuddet er $\frac{1}{6}$ av befolkningen ved starten av perioden, $\frac{1}{3}$ av disse er immune, $\frac{2}{3}$ mottakelige.

b) Vis at $\begin{bmatrix} X_{n+1} \\ Y_{n+1} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} X_n \\ Y_n \end{bmatrix}$ fra a).

Dynamikkdiagram:



Tilskuddet: $\frac{1}{6}(X_n+Y_n)$ $\xrightarrow{\text{immune}}$ $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}(X_n+Y_n) = \frac{1}{18}(X_n+Y_n)$

$\xrightarrow{\text{mottakelige}}$ $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6}(X_n+Y_n) = \frac{1}{9}(X_n+Y_n)$

$$X_{n+1} = \left(\frac{4}{9}X_n + \frac{1}{2}Y_n\right) + \frac{1}{18}(X_n+Y_n)$$

$$Y_{n+1} = \left(\frac{4}{9}X_n + \frac{7}{18}Y_n\right) + \frac{1}{9}(X_n+Y_n).$$

$$X_{n+1} = \frac{4}{9}X_n + \frac{1}{18}X_n + \frac{1}{2}Y_n + \frac{1}{18}Y_n$$

$$= \left(\frac{4}{9}+\frac{1}{18}\right)X_n + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{18}\right)Y_n$$

$$X_{n+1} = \frac{1}{2}X_n + \frac{5}{9}Y_n.$$

$$Y_{n+1} = \frac{4}{9}X_n + \frac{1}{9}X_n + \frac{7}{18}Y_n + \frac{1}{9}Y_n$$

$$= \left(\frac{4}{9}+\frac{1}{9}\right)X_n + \left(\frac{7}{18}+\frac{1}{9}\right)Y_n$$

$$Y_{n+1} = \frac{5}{9}X_n + \frac{1}{2}Y_n.$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} X_{n+1} \\ Y_{n+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{9} \\ \frac{5}{9} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{\text{er lik } M \text{ fra a)}} \begin{bmatrix} X_n \\ Y_n \end{bmatrix}.$$

c) Anta at X_0 = 8 millioner, Y_0 = 2 millioner.
Finn X_n og Y_n.

1) Egenverdier ✓
2) Egenvektorer ✓
3) Initialkoeffisienter
4) Sette inn i formel

Initialkoeffisientene:

$$k_1 V_1 + k_2 V_2 = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix}.$$

$$k_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$$\overset{R_1+R_2}{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}} \sim \overset{\cdot\frac{1}{2}}{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 10 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{R_2-R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}. \quad \begin{aligned} k_1 &= -3 \\ k_2 &= 5. \end{aligned}$$

Formel:

$$\begin{bmatrix} X_n \\ Y_n \end{bmatrix} = k_1 \lambda_1^n V_1 + k_2 \lambda_2^n V_2.$$

$$\begin{bmatrix} X_n \\ Y_n \end{bmatrix} = -3\left(-\frac{1}{18}\right)^n \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + 5\left(\frac{19}{18}\right)^n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$= \begin{bmatrix} 3\left(-\frac{1}{18}\right)^n \\ -3\left(-\frac{1}{18}\right)^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5\left(\frac{19}{18}\right)^n \\ 5\left(\frac{19}{18}\right)^n \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} X_n \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\left(-\frac{1}{18}\right)^n + 5\left(\frac{19}{18}\right)^n \\ -3\left(-\frac{1}{18}\right)^n + 5\left(\frac{19}{18}\right)^n \end{bmatrix}$$

d) Når $n \to \infty$, andelen immune går mot en grense.
Hva er den?

$$\text{Andelen immune ved år } 10n = \frac{\text{immune}}{\text{immune + mottakelige}} \boxed{= \frac{X_n}{X_n+Y_n}.}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{X_n+Y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{+3\left(-\frac{1}{18}\right)^n + 5\left(\frac{19}{18}\right)^n}{10\left(\frac{19}{18}\right)^n}$$

$$X_n + Y_n = \left(\cancel{3\left(-\frac{1}{18}\right)^n} + 5\left(\frac{19}{18}\right)^n\right) + \left(\cancel{-3\left(-\frac{1}{18}\right)^n} + 5\left(\frac{19}{18}\right)^n\right)$$

$$= 10\left(\frac{19}{18}\right)^n.$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3\left(\frac{-1}{18}\right)^n}{10\left(\frac{19}{18}\right)^n} + \frac{5\left(\frac{19}{18}\right)^n}{10\left(\frac{19}{18}\right)^n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{10}\left(\frac{-\frac{1}{18}}{\frac{19}{18}}\right)^n + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{10}\left(-\frac{1}{19}\right)^n + \frac{1}{2}\right)$$

Regel:

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$\frac{-\frac{1}{18}\cdot 18}{\frac{19}{18}\cdot 18} = -\frac{1}{19}$$

bestemmer om uttrykket konvergerer.

$$\left|-\frac{1}{19}\right| = \frac{1}{19} < 1 \Rightarrow \left(-\frac{1}{19}\right)^n \longrightarrow 0.$$

$$= \frac{3}{10}\cdot 0 + \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}.$$

50% av befolkningen blir immune når $n \to \infty$.

A.6.1: Finn den generelle løsningen:

a) $x_{n+1} + 2x_n = 0.$

$x_{n+1} = (-2)x_n$

Gen. løsning: $x_n = C(-2)^n.$

Homogen differenslikning av orden 1:
$x_{n+1} = r x_n$, $r \in \mathbb{R}$.
Generell løsning
$x_n = C r^n.$

b) $x_{n+1} - \frac{1}{2}x_n = 0$

$x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n$

$x_n = C\left(\frac{1}{2}\right)^n.$

c) $x_{n+1} + x_n = 0.$

$x_{n+1} = (-1)\cdot x_n$

$x_n = C(-1)^n$

6.3: Banken tilbyr en rente på 6.2 % pr år.
Vi setter 10 000 kr (ved år 0).

a) Finn en formel for beløpet etter n år.

x_n = beløp ved år n.

$x_0 = 10\ 000$

$x_{n+1} = \underbrace{1.0\ \ 62}_{\text{vekstfaktor}} \cdot x_n$ — fjernet en null

$V = 1 + \frac{p}{100}$, p = prosent

Første ordens homogen differenslikning.
Generelle formelen er $x_n = C\,1.0\ 62^n.$
Initial verdi: $x_0 = 10\ 000.$
Bruk er formelen for $n=0$: $x_0 = C \cdot 1.062^0$
$x_0 = C \Rightarrow C = 10\ 000.$

Spesiell løsning: $x_n = 10\ 000 \cdot 1.062^n.$

b) Når har vi 20 000 kr på kontoen?

Løser $x_n = 20\ 000.$

$$\frac{10\ 000 \cdot 1.062^n}{10\ 000} = \frac{20\ 000}{10\ 000}$$

$$\boxed{1.062^n = 2}$$

$\log(1.062^n) = \log(2)$

$n \log(1.062) = \log(2)$

$n = \frac{\log(2)}{\log(1.062)} \approx 11.52.$ Får vi 20 000kr etter 12 år.

c) Sjekk at tiden det tar for at beløpet dobles alltid tar like lang tid.

År k har x_k kr. Når er dette doblet?

Løser $x_n = 2x_k$. Setter inn: $(C = 10\ 000)$

$\boxed{x_n = C \cdot 1.062^n}$

$$\frac{C \cdot 1.062^n}{C} = \frac{2C \cdot 1.062^k}{C}$$

$$\frac{1.062^n}{1.062^k} = \frac{2 \cdot \cancel{1.062^k}}{\cancel{1.062^k}}$$

$\boxed{\frac{a^n}{a^k} = a^{n-k}}$

$(1.062)^{n-k} = 2$

Fra b)... $\rightsquigarrow$ $n - k \approx 11.52$

$n - k = 12.$

$n = 12 + k.$

Det tar 12 år til beløpet dobles fra år k.

d) Hvor høy må renten være for at beløpet skal dobles etter 7 år?

La r = vekstfaktor. $\left(r = 1 + \frac{p}{100} \right)$

X_n = beløp ved år n.

$X_{n+1} = r X_n$. $\rightsquigarrow$ Generell løsning $X_n = Cr^n$.

Dobles etter 7 år: $X_7 = 2X_0$

$Cr^7 = 2Cr^0$

$\frac{\cancel{C} r^7}{\cancel{C}} = \frac{2\cancel{C}}{\cancel{C}}$

$r^7 = 2$.

$r = \sqrt[7]{2} \approx 1.104$.

10.4% rente gir vekstfaktor 1.104.

e) En annen bank tilbyr 0.5% pr måned. Bør vi bytte?

Finner en formel for beløpet ved måned n.

Y_n = beløp ved måned n. $Y_0 = 10\,000$.

Vekstfaktor = 1.005.

Får en formel: $Y_{n+1} = 1.005 Y_n$.

Generell formel: $Y_n = C \cdot 1.005^n$.

$C = 10\,000$: $Y_n = 10\,000 \cdot 1.005^n$.

Sammenligne med X_n = beløp ved år n.

Ved år k. Da har vi X_k kr i den første.

Har gått $n = 12k$ måneder etter k år.

Da har vi Y_{12k} kr i den andre.

$Y_{12k} = 10\,000 \cdot 1.005^{12k}$

$X_k = 10\,000 \cdot 1.062^k$

$Y_{12k} = 10\,000 \cdot (1.005^{12})^k$

$1.005^{12} \approx 1.0617$ er den årlige vekstfaktoren.

Litt lavere enn 1.062. Burde ikke bytte.

7.1 a) Finn $\mathrm{Re}(\underbrace{2+3i}_{\text{komplekst tall}}) = \underline{\underline{2}}.$

c) Finn $\mathrm{Im}(14.5+\boxed{0.2}i) = \underline{\underline{0.2}}$

7.2 a) Regn ut:

$$(3+4i)+(5+2i)$$
$$= 3+5+4i+2i$$
$$= \underline{\underline{8+6i}}$$