UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1001 — Matematikk I
Eksamensdag:	Fredag 4. juni 2010
Tid for eksamen:	09.00 – 12.00
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Ett tosidig A4-ark med valgfri tekst. Godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

På denne eksamenen kan du oppnå totalt 67 poeng. Vektingen av de ulike oppgavene står angitt ved hver deloppgave. Poengene på dagens eksamen legges sammen med den poengsummen du fikk på midtveiseksamen, slik at samlet poengsum blir maksimalt 100 poeng. Denne summen legges til grunn for karakteren du får på kurset.

Oppgave 1

a) [8 poeng] Finn alle de antideriverte til funksjonen $f(x) = 3xe^{x^2}$.

b) [10 poeng] En første ordens lineær differensiallikning er gitt ved

$$y' + xy = xe^{\frac{1}{2}x^2}.$$

Finn den spesielle løsningen til denne differensiallikningen som tilfredsstiller $y(0) = 1$.

Oppgave 2

En andre ordens differensiallikning er gitt ved

$$y'' + 4y = 0.$$

a) [8 poeng] Finn den generelle løsningen til denne differensiallikningen.

b) [6 poeng] Finn den spesielle løsningen av differensiallikningen som tilfredsstiller $y(0) = 2$ og $y'(0) = -4\sqrt{3}$.

c) [4 poeng] Svaret i b) er en harmonisk svingning. Vis ved utregning at svingningen kan skrives som

$$y(x) = 4\cos(2x - \frac{5\pi}{3}).$$

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3

For en funksjon $z(t)$ har vi differensiallikningen

$$z' = -kz,$$

der k er en positiv reell konstant.

a) [8 poeng] Løs differensiallikningen og finn et uttrykk for $z(t)$.

b) [6 poeng] La N være et positivt reelt tall. Vis at dersom vi har $z(0) = N$ og $z(5730) = \frac{N}{2}$, vil løsningen i a) være gitt ved

$$z(t) = Ne^{-\frac{t \ln 2}{5730}}.$$

c) [2 poeng] Uttrykket i b) brukes for å beregne alder på organisk materiale ved en metode kalt Karbon-14. Man sammenlikner innholdet av isotopen Karbon-14 i nålevende organisk materiale og i det materialet man ønsker å beregne alderen til. På et arkeologisk utgravningssted i Hellas er det funnet en gammel tretavle med matematiske inskripsjoner. Det tas en prøve av tretavlen, og målinger viser at verdien av z er $\frac{4}{5}N$. Dette betyr at ved et tidspunkt t_0 er $z(t_0) = \frac{4}{5}N$. Den berømte matematikeren Pythagoras levde i perioden 580-500 f.Kr. Er det mulig at inskripsjonene kan være laget av ham? Begrunn svaret ditt ved bruk av modellen i b).

Oppgave 4

I hele denne oppgaven lar vi P være en positiv reell konstant. Vi antar også at $P \neq 1$.

a) [5 poeng] Finn egenverdiene og egenvektorene til matrisen M,

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1-P \\ 0 & P \end{bmatrix}.$$

b) [7 poeng] Vi har

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1-P \\ 0 & P \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Gitt

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix},$$

finn et uttrykk for

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}.$$

c) [3 poeng] Angi for hvilke verdier av P grenseverdien

$$\lim_{n \to \infty} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$$

eksisterer, og angi grenseverdien i disse tilfellene.

SLUTT