

MAT1001 — LØSNINGSFORSLAG TIL MIDTVEISEKSAMENER

KNUT AASEN

SAMMENDRAG. Heftet inneholder løsninger av midtveiseksamener gitt i MAT1001, fra og med høsten 2009 til og med høsten 2014. Med forbehold om feil.

1. MIDTVEIS MAT1001 HØSTEN 2009 — LØSNING

Problem 1. Vi har det lineære likningssystemet

$$\begin{cases} x + y + 5z = 4 \\ -x - 2y - z = -1 \\ 3x + 4y - z = -3. \end{cases}$$

Ved radreduksjon har vi at

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 4 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{III-3I, II+I} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -16 & -15 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{II+III} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & -12 & -12 \\ 0 & 1 & -16 & -15 \end{pmatrix} \xrightarrow{II \cdot -\frac{1}{12}, III+16 \cdot II, I-9 \cdot II, II \leftrightarrow III} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{cases} x = -2, \\ y = 1, \\ z = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

■

Problem 2. Vi har det lineære likningssystemet

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ -y + z = 1 \\ 2x + 2y + az = 4. \end{cases}$$

Ved radreduksjon har vi at

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & a & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{III-2 \cdot I} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a+2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vi ser nå at vi får én fri variabel hvis vi setter $a = -2$, og følgelig har vi uendelig mange løsninger når $a = -2$. ■

Alternativ løsningsmetode: Vi setter determinanten av koeffisientmatrisen lik null, og bruker teorem 3.13 fra Borge. Vi har at

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & a \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & a \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -a - 2 - 1 \cdot (-2) - 1 \cdot 2 = -a - 2 \iff a = -2. \end{aligned}$$

Nå følger det av teorem 3.13 at svaret må være $a = -2$. ■

Problem 3. Vi har egenverdiene ved

$$0 = \det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ -9 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^2 - 9 = (\lambda + 2)(\lambda - 4) \begin{cases} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = 4. \end{cases}$$

■

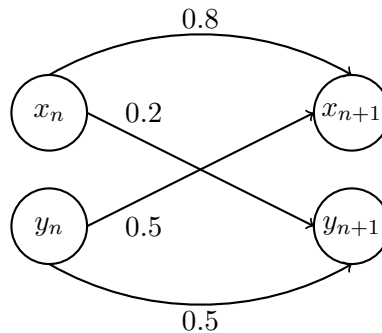
Problem 4. Vi multipliserer de gitte vektorene med B for å finne hvilken av de som ikke er en egenvektor for matrisen:

$$(a) \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Vi ser nå at $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, ikke er en egenvektor for B .

■

Problem 5. Vi kan illustrere overgangene ved



Av tegningen har vi at

$$\begin{cases} x_{n+1} = 0.8x_n + 0.5y_n \\ y_{n+1} = 0.2x_n + 0.5y_n, \end{cases}$$

slik at overgangsmatrisen M er gitt ved

$$M = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.5 \\ 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

■

Problem 6. Vi har at

$$\begin{aligned} -2(1 + 2i)(2 - i)(1 + i) &= -2(2 - i + 4i + 2)(1 + i) = -2(4 + 3i)(1 + i) \\ &= -2(4 + 7i - 3) = -2 - 14i, \end{aligned}$$

og dermed er realdelen -2 .

■

Problem 7. Vi har

$$\begin{aligned} z &= 2\sqrt{2}ie^{i\frac{\pi}{4}} - 2i = 2\sqrt{2}i \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) - 2i = 2\sqrt{2}i \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - 2i \\ &= 2i - 2 - 2i = -2. \end{aligned}$$

■

Problem 8. Vi har røttene til den karakteristiske likningen ved

$$r + \frac{1}{2} = 0 \iff r = -\frac{1}{2}$$

Nå har vi den homogene løsningen $x_n^h = C \left(-\frac{1}{2}\right)^n$. Videre finner vi partikulærløsningen, der vi først prøver med formen $x_n^p = A$, slik at

$$A + \frac{1}{2}A = \frac{3}{2} \iff A = 1.$$

Vi har nå partikulærløsningen $x_n^p = 1$ og følgelig har vi

$$x_n = x_n^h + x_n^p = C \left(-\frac{1}{2}\right)^n + 1 \rightarrow 1, \quad \text{når } n \rightarrow \infty.$$

■

Problem 9. Vi har røttene til den karakteristiske likningen ved

$$r^2 - r - 6 = 0 \iff (r + 2)(r - 3) = 0 \begin{cases} r_1 = -2 \\ r_2 = 3. \end{cases}$$

■

Problem 10. Vi har roten til den karakteristiske likningen ved

$$1 - r = 0 \iff r = 1.$$

Nå har vi den homogene løsningen $x_n^h = C$. Videre finner vi partikulærløsningen, der vi prøver med formen $x_n^p = An + B$, slik at

$$-n = An + B - (A(n + 1) + B) = -A.$$

Dette gikk ikke, så vi går nå opp én grad og prøver med $x_n^p = An^2 + Bn + C$.

$$-n = An^2 + Bn + C - (A(n + 1)^2 + B(n + 1) + C) = -2An - A - B = -2An - A - B$$

Dette gir likningssystemet

$$\begin{cases} -2A = -1 \iff A = \frac{1}{2} \\ -A - B = 0 \iff B = -A \iff B = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Nå har vi partikulærløsningen $x_n^p = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$, og følgelig har vi

$$x_n = x_n^h + x_n^p = C + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n \rightarrow \infty, \quad \text{når } n \rightarrow \infty.$$

■

Problem 11. Vi finner egenverdiene ved

$$\begin{aligned} 0 = \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & 1 \\ \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \left(\frac{1}{2} - \lambda\right) - \frac{1}{2} = \lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2} \\ &= (\lambda - 1)\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -\frac{1}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

For λ_1 , har vi ved radreduksjon at

$$(A - \lambda_1 I \quad O) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{I: \cdot 2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \iff x_1 = 2x_2, \\ x_2 \text{ er fri.} \end{cases}$$

Vi setter $x_2 = 1$ og får egenvektoren $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Videre for λ_2 , har vi ved radreduksjon at

$$\begin{aligned} (A - \lambda_2 I \quad O) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{II: \cdot 2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \iff x_1 = -x_2, \\ x_2 \text{ er fri.} \end{cases} \end{aligned}$$

Vi setter $x_2 = 1$ og får egenvektoren $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Nå skriver vi $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ som en lineærkombinasjon av egenvektorene. Vi ønsker altså å finne α_1 og α_2 slik at

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 \iff \begin{pmatrix} 15 \\ 15 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nå har vi det lineære likningssystemet

$$\begin{cases} 2\alpha_1 - \alpha_2 = 15 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 15. \end{cases}$$

Ved radreduksjon har vi at

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 15 \\ 1 & 1 & 15 \end{pmatrix} \xrightarrow{I-2\cdot II} \begin{pmatrix} 0 & -3 & -15 \\ 1 & 1 & 15 \end{pmatrix} \xrightarrow{I \leftrightarrow II} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{cases} \alpha_1 = 10 \\ \alpha_2 = 5. \end{cases}$$

Vi kan nå skrive $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = 10\mathbf{v}_1 + 5\mathbf{v}_2$, som gir

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^n (10\mathbf{v}_1 + 5\mathbf{v}_2) = 10 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^n \mathbf{v}_1 + 5 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^n \mathbf{v}_2 \\ &= 10(1)^n \mathbf{v}_1 + 5 \left(-\frac{1}{2}\right)^n \mathbf{v}_2 = 10\mathbf{v}_1 + 5 \left(-\frac{1}{2}\right)^n \mathbf{v}_2 \rightarrow 10\mathbf{v}_1, \quad \text{når } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Følgelig har vi at $x_n \rightarrow 20$ når $n \rightarrow \infty$. ■

2. MIDTVEIS MAT1001 VÅREN 2010 — LØSNING

Problem 1. Vi har det lineære likningssystemet

$$\begin{cases} x + 3y = 4 \\ x - y = 4a. \end{cases}$$

Ved radreduksjon har vi at

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 4a \end{pmatrix} \xrightarrow[I \leftrightarrow II]{I-II} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4a \\ 0 & 4 & 4-4a \end{pmatrix} \xrightarrow[I+II]{II \cdot \frac{1}{4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+3a \\ 0 & 1 & 1-a \end{pmatrix} \begin{cases} x = 1+3a \\ y = 1-a. \end{cases}$$

■

Problem 2. Vi har det lineære likningssystemet

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ -x + az = 1 \\ x + z = 1. \end{cases}$$

Ved radreduksjon har vi

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[II+III]{I-III} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & a+1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[I \leftrightarrow III]{I \leftrightarrow II} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & a+1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hvis vi nå setter $a = -1$, får vi et inkonsistent likningssystem. ■

Alternativ løsningsmetode: Vi setter determinanten av koeffisientmatrisen lik null, og bruker teorem 3.13 fra Borge. Vi har

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & a \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 0 & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -1 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1(-1-a) = 1+a \iff a = -1.$$

Av teorem 3.13 må svaret være $a = -1$. ■

Problem 3. Vi har determinanten til A ved

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot a - 0 \cdot 1 + a - 1 + 1 \cdot 0 - 1 = 2a - 2. \end{aligned}$$

■

Problem 4. Vi finner egenverdiene til M ved

$$0 = \det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 3. \end{cases}$$

■

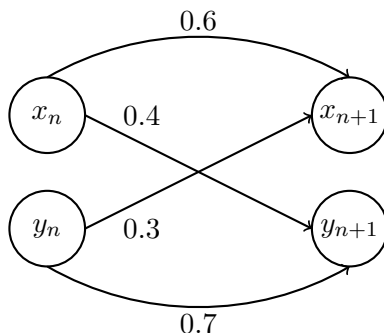
Problem 5. Vi multipliserer de gitte vektorene med B for å finne hvilke av de som er egenvektorer for matrisen.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -10 \end{pmatrix} \\ \text{(b)} \quad & \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -11 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$(c) \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nå ser vi at $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ er en egenvektor for B med tilhørende egenverdi -2 . ■

Problem 6. Vi kan illustrere overgangene ved



Av tegningen har vi at

$$\begin{cases} x_{n+1} = 0.6x_n + 0.3y_n \\ y_{n+1} = 0.4x_n + 0.7y_n, \end{cases}$$

slik at overgangsmatrisen M er gitt ved

$$M = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 \end{pmatrix}.$$

Problem 7. Vi har at

$$2(1-i)(1+i) - 2 = 2(1+1) - 2 = 2,$$

og følgelig er imaginærdelen 0. ■

Problem 8. Vi har at

$$\begin{aligned} z &= e^{i\frac{\pi}{6}} \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\pi} = \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) - 1 \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - 1 = \frac{\sqrt{3}}{4} + i \frac{3}{4} + i \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} - 1 = -1 + i \end{aligned}$$

Kommentar: Alternativt kan vi multiplisere eksponentialene til å begynne med, slik at vi får

$$\begin{aligned} z &= e^{i\frac{\pi}{6}} \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\pi} = e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3})} + \cos(\pi) + i \sin(\pi) = e^{i\frac{\pi}{2}} - 1 \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1 = -1 + i. \end{aligned}$$

Problem 9. Vi har roten til den karakteristiske likningen ved

$$r + \frac{2}{3} = 0 \iff r = -\frac{2}{3}.$$

Følgelig er den homogene løsningen $x_n^h = C \left(-\frac{2}{3}\right)^n$. Videre finner vi partikulærløsningen, der vi først prøver med formen $x_n^p = A$, slik at vi får

$$A + \frac{2}{3}A = -\frac{10}{3} \iff A = -2.$$

Vi har nå partikulærløsningen $x_n^p = -2$, og dermed

$$x_n = x_n^h + x_n^p = C \left(-\frac{2}{3} \right)^n - 2 \rightarrow -2, \quad \text{når } n \rightarrow \infty.$$

Problem 10. Vi har den karakteristiske likningen

$$r^2 + r + 1 = 0,$$

og dermed røttene ved

$$r = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{-3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Slik at vi får modulusen ved

$$\rho = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1.$$

Nå finner vi argumentet ved

$$\begin{aligned} \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} &\iff \theta = \frac{\pi}{3} \text{ eller } \theta = \frac{2\pi}{3} \\ \cos \theta = -\frac{1}{2} &\iff \theta = \frac{2\pi}{3} \text{ eller } \theta = \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$

Følgelig har vi argumentet $\theta = \frac{2\pi}{3}$ og da den generelle løsningen

$$x_n = E \cos\left(n\frac{2\pi}{3}\right) + F \sin\left(n\frac{2\pi}{3}\right).$$

Videre gir initialbetingelsene oss likningssystemet

$$\begin{cases} x_0 = 2 \iff E = 2 \\ x_1 = 1 \iff E \cos \frac{2\pi}{3} + F \sin \frac{2\pi}{3} = 2 \iff 2\left(-\frac{1}{2}\right) + F \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 \iff F = \frac{4}{\sqrt{3}}. \end{cases}$$

Nå følger den endelige løsningen

$$x_n = 2 \cos\left(n\frac{2\pi}{3}\right) + \frac{4}{\sqrt{3}} \sin\left(n\frac{2\pi}{3}\right).$$

Slik at for $n = 2010$, så har vi

$$\begin{aligned} x_{2010} &= 2 \cos\left(\frac{4020}{3}\pi\right) + \frac{4}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{4020}{3}\pi\right) = 2 \cos(1340\pi) + \frac{4}{\sqrt{3}} \sin(1340\pi) \\ &= 2 \cos(2\pi \cdot 670) + \frac{4}{\sqrt{3}} \sin(2\pi \cdot 670) = 2 \cos 2\pi + \frac{4}{\sqrt{3}} \sin 2\pi = 2. \end{aligned}$$

Problem 11. Vi finner partikulærløsningen, der vi først prøver med formen $x_n^p = An + B$.

$$4n = A(n+2) + B - (An + B) = 2A$$

Dette gikk ikke, så vi går opp én grad og prøver med $x_n^p = An^2 + Bn + C$.

$$4n = A(n+2)^2 + B(n+2) + C - (An^2 + Bn + C) = 4An + 4A + 2B$$

Vi har nå likningssystemet

$$\begin{cases} 4 = 4A \iff A = 1 \\ 0 = 4A + 2B \iff 0 = 4 + 2B \iff B = -2. \end{cases}$$

Nå har vi partikulærløsningen $x_n^p = n^2 - 2n$, som er et av svaralternativene.

Alternativ løsningsmetode: Vi setter svaralternativene inn i venstresiden av likningen og ser for hvilket vi oppnår likhet.

(a) $4(n+2) - 4n = 4n + 2 - 4n = 2$

(b) $4(n+2)^2 + (n+2) - 4(n^2+n) = 4n^2 + 16n + 16 + n + 2 - 4n^2 - n = 16n + 18$

(c) $n + 2 - 2 - (n - 2) = 2$

(d) $(n+2)^2 - 2(n+2) - (n^2 - 2n) = n^2 + 4n + 4 - 2n - 4 - n^2 + 2n = 4n$

Vi ser nå at svaralternativ (d) er en løsnings av den inhomogene differenslikningen. ■

3. MIDTVEIS MAT1001 HØSTEN 2010 — LØSNING

Problem 1. Vi har det lineære likningssystemet

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 3x - 2y + z = a \\ 2x + y + z = 3a + 3. \end{cases}$$

Ved radreduksjon har vi

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & a \\ 2 & 1 & 1 & 3a+3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\sim]{\substack{II-3\cdot I \\ III-2\cdot I}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & a-3 \\ 0 & 3 & -1 & 3a+1 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow[\sim]{\substack{I+II \\ III-3\cdot II}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & a-2 \\ 0 & 1 & -2 & a-3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow[\sim]{\substack{III\cdot\frac{1}{5} \\ I+III, I+III}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & a+1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{cases} x = a \\ y = a+1 \\ z = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

■

Problem 2. Vi har det lineære likningssystemet

$$\begin{cases} ax + y = 1 \\ 4x + ay = 2. \end{cases}$$

Ved radreduksjon har vi

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 4 & a & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\sim]{I\cdot\frac{1}{a}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ 4 & a & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\sim]{II-4\cdot I} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ 0 & a - \frac{4}{a} & 2 - \frac{4}{a} \end{pmatrix}.$$

Hvis vi nå setter $a = 2$ får vi én fri variabel, og følgelig uendelig mange løsninger. ■

Alternativ løsningsmetode: Vi setter determinanten av koeffisientmatrisen lik null, og bruker teorem 3.13 fra Borge. Vi har at

$$0 = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 4 & a \end{vmatrix} = a^2 - 4 \iff a = \pm 2.$$

Nå setter vi inn for a i det opprinnelige system, for å sjekke for hvilket av tilfellene vi får uendelig mange løsninger. Vi starter med $a = 2$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\sim]{\substack{II-2\cdot I \\ I\cdot\frac{1}{2}}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nå har vi én fri variabel og følgelig har vi uendelig mange løsninger når $a = 2$. ■

Problem 3. Vi har at

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -a \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -a \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -a \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 1 - 2a + 1 + 3a - 2 - 3 = a - 3. \end{aligned}$$

■

Problem 4. Vi har egenverdiene til M ved

$$\begin{aligned} 0 &= \det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 8 \\ 1 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda)(5 - \lambda) - 8 = 15 - 8\lambda + \lambda^2 - 8 \\ &= \lambda^2 - 8\lambda + 7 = (\lambda - 1)(\lambda - 7) \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 7. \end{cases} \end{aligned}$$

■

Problem 5. Vi multipliserer de gitte vektorene med B for å finne hvilken av de som er en egenvektor for matrisen.

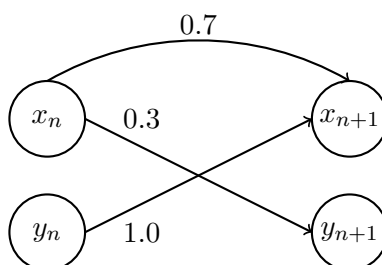
$$(a) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & -1 \\ 8 & -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$(b) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & -1 \\ 8 & -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$(c) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & -1 \\ 8 & -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -9 \\ 18 \end{pmatrix} = 9 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Nå ser vi at $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ er en egenvektor for B med tilhørende egenverdi 9. ■

Problem 6. Vi kan illustrere overgangene ved



Av tegningen har vi at

$$\begin{cases} x_{n+1} = 0.7x_n + y_n \\ y_{n+1} = 0.3x_n, \end{cases}$$

slik at overgangsmatrisen M er gitt ved

$$M = \begin{pmatrix} 0.7 & 1.0 \\ 0.3 & 0.0 \end{pmatrix}.$$

Problem 7. Vi har at

$$\begin{aligned} 3(a + 2i)(-1 + i) + 7 + 3ai &= 3(-a + ai - 2i - 2) + 7 + 3ai \\ &= -3a + 3ai - 6i - 6 + 7 + 3ai = -3a + 1 + (6a - 6)i, \end{aligned}$$

og dermed er realdelen $-3a + 1$. ■

Problem 8. Vi har at

$$\begin{aligned} z &= 2e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot e^{i\frac{\pi}{6}} + 1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) + 1 \\ &= 2i \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) + 1 = \sqrt{3}i - 1 + 1 = \sqrt{3}i. \end{aligned}$$

Kommentar: Alternativt kan vi multiplisere eksponentialene til å begynne med, slik at vi får

$$\begin{aligned} z &= 2e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot e^{i\frac{\pi}{6}} + 1 = 2e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6})} + 1 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} + 1 = 2 \left(\cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{3} \right) \right) \\ &= 2 \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 1 = i\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Problem 9. Vi har roten til den karakteristiske likningen ved

$$r - 0.6 = 0 \iff r = 0.6.$$

Dette gir den homogene løsningen $x_n^h = C(0.6)^n$. Videre finner vi partikulærløsningen, der vi prøver med formen $x_n^p = A$.

$$2 = A - 0.6A \iff A = \frac{2}{0.4} = 5$$

Nå har vi partikulærløsningen $x_n^p = 5$, og følgelig har vi

$$x_n = x_n^h + x_n^p = C(0.6)^n + 5 \rightarrow 5, \quad \text{når } n \rightarrow \infty.$$

Problem 10. Vi har den karakteristiske likningen

$$r^2 - 0.4r - 0.6 = 0$$

og dermed røttene ved

$$r = \frac{0.4}{2} \pm \frac{\sqrt{\frac{4}{25} + \frac{12}{5}}}{2} = \frac{1}{5} \pm \frac{\left(\frac{8}{5}\right)}{2} = \frac{1}{5} \pm \frac{4}{5} \begin{cases} r_1 = 1 \\ r_2 = -\frac{3}{5}. \end{cases}$$

Nå har vi den generelle løsningen $x_n = C + D\left(-\frac{3}{5}\right)^n$. Videre gir initialbetingelsene oss liknings-systemet

$$\begin{cases} x_0 = 50 \iff C + D = 50 \\ x_1 = 34 \iff C - \frac{3}{5}D = 34. \end{cases}$$

Ved radreduksjon har vi

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 50 \\ 1 & -\frac{3}{5} & 34 \end{pmatrix} \xrightarrow{II-I} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 50 \\ 0 & -\frac{8}{5} & -16 \end{pmatrix} \xrightarrow{II \cdot -\frac{5}{8}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 50 \\ 0 & 1 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{I-II} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 40 \\ 0 & 1 & 10 \end{pmatrix} \begin{cases} C = 40 \\ D = 10. \end{cases}$$

Nå har vi at

$$x_n = 40 + 10\left(-\frac{3}{5}\right)^n \rightarrow 40, \quad \text{når } n \rightarrow \infty.$$

Problem 11. Vi har den karakteristiske likningen

$$r^2 - \sqrt{3}r + 1 = 0,$$

og dermed røttene ved

$$r = \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{\sqrt{-1}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i.$$

Nå får vi modulusen

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1.$$

Vi får argumentet ved

$$\begin{aligned} \sin \theta = \frac{1}{2} &\iff \theta = \frac{\pi}{6} \text{ eller } \theta = \frac{5\pi}{6} \\ \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} &\iff \theta = \frac{\pi}{6} \text{ eller } \theta = \frac{11\pi}{6}. \end{aligned}$$

Følgelig har vi argumentet $\theta = \frac{\pi}{6}$, og videre er den generelle løsningen

$$x_n = E \cos\left(n\frac{\pi}{6}\right) + F \sin\left(n\frac{\pi}{6}\right)$$

Når gir initialbetingelsene oss likningssystemet

$$\begin{cases} x_0 = 0 & \iff E = 0 \\ x_1 = 1 & \iff F \sin \frac{\pi}{6} = 1 \iff F = 2 \end{cases}$$

Da følger den endelige løsningen $x_n = 2 \sin\left(n\frac{\pi}{6}\right)$, som gir

$$x_{15} = 2 \sin\left(15\frac{\pi}{6}\right) = 2 \sin\left(\frac{3 \cdot 5}{3 \cdot 2}\pi\right) = 2 \sin\left(\frac{5}{2}\pi\right) = 2 \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 2 \sin\frac{\pi}{2} = 2 \cdot 1 = 2.$$

■

4. MIDTVEIS MAT1001 HØSTEN 2011 — LØSNING

Problem 1. Vi har at

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 - 2(-1 \cdot -1 + 2 \cdot 0) + (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 2 = -10. \end{aligned}$$

Problem 2. Vi har matriseproduktet ved

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 3 & a & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & a \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 0 + a \cdot 1 + (-1) \cdot 1 & 3 \cdot 1 + a \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & a-1 \\ a-1 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Problem 3. Vi har det lineære likningssystemet

$$\begin{cases} x + y + 3z = 7 \\ x + 2y - 2z = -4 \\ 2x + 3y - 4z = -7. \end{cases}$$

Ved radreduksjon har vi

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & -4 & -7 \end{pmatrix} &\stackrel{II-I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & -5 & -11 \\ 0 & 1 & -10 & -21 \end{pmatrix} \stackrel{III-II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & -5 & -11 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \end{pmatrix} \\ &\stackrel{II-III}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \stackrel{I-III}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Problem 4. Vi har det lineære likningssystemet

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x + 2y + az = 0 \\ 2x + ay + 2z = 2. \end{cases}$$

Ved radreduksjon har vi

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & a & 0 \\ 2 & a & 2 & 2 \end{pmatrix} \stackrel{II+I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & a+1 & 1 \\ 0 & a-2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hvis vi nå setter $a = 2$ får vi én fri variabel og følgelig uendelig mange løsninger.

Alternativ løsningsmetode: Vi setter determinanten av koeffisientmatrisen lik null, og bruker teorem 3.13 fra Borge. Vi har

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & a \\ 2 & a & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & a \\ a & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & a \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & a \end{vmatrix} = 4 - a^2 - (-2 - 2a) - a - 4 \\ &= -a^2 + a + 2 = -(a-2)(a+1) \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

Nå setter vi inn for a i det opprinnelige system, for å sjekke for hvilket av tilfellene vi får uendelig mange løsninger. Vi starter med $a = 2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\sim]{III-2I} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nå har vi én fri variabel og følgelig uendelig mange løsninger når $a = 2$. ■

Problem 5. Vi har egenverdiene til M ved

$$\begin{aligned} 0 = \det(M - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 4 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(-2 - \lambda) - 4 = -2 + \lambda + \lambda^2 - 4 \\ &= \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda + 3)(\lambda - 2) \begin{cases} \lambda_1 = -3 \\ \lambda_2 = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Problem 6. Vi multipliserer de gitte vektorene med B for å finne hvilken av de som er egenvektorer for matrisen.

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(b) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$(c) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vi ser nå at $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ er en egenvektor for B med tilhørende egenverdi 1. ■

Problem 7. Vi har

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}} + e^{i\pi} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right) + \cos \pi + i \sin \pi \\ &= \sqrt{2}(0 + i) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - 1 = i. \end{aligned}$$

Kommentar: Alternativt kan vi multiplisere eksponentialene til å begynne med, slik at vi får

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}} + e^{i\pi} = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})} + \cos(\pi) + i \sin(\pi) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} - 1 \\ &= \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) \right) - 1 = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - 1 = i. \end{aligned}$$

Problem 8. Vi har roten til den karakteristiske likningen ved

$$r - \frac{1}{2} = 0 \iff r = \frac{1}{2},$$

slik at den homogene løsningen er gitt ved $x_n^h = C \left(\frac{1}{2} \right)^n$. Videre finner vi partikulærløsningen der vi først prøver med formen $x_n^p = A$.

$$\frac{1}{2} = A - \frac{1}{2}A \iff A = 1$$

Nå har vi partikulærløsningen $x_n^p = 1$, og dermed

$$x_n = x_n^h + x_n^p = C \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1 \rightarrow 1, \quad \text{når } n \rightarrow \infty.$$

Problem 9. Vi har røttene til den karakteristiske likningen ved

$$r^2 + 2r - 3 = 0 \iff (r + 3)(r - 1) = 0 \begin{cases} r_1 = -3 \\ r_2 = 1. \end{cases}$$

Nå har vi den generelle løsningen

$$x_n = C(-3)^n + D(1)^n = C(-3)^n + D.$$

Videre gir initialbetingelsene oss likningssystemet

$$\begin{cases} x_0 = 2 \iff C + D = 2 \\ x_1 = 2 \iff -3C + D = 2. \end{cases}$$

Ved radreduksjon har vi

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{II+3\cdot I} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{II \cdot \frac{1}{4} \\ I - II}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{cases} C = 0 \\ D = 2. \end{cases}$$

Følgelig har vi den endelige løsningen $x_n = 2$, og følgelig er $x_{2011} = 2$.

Problem 10. Vi finner partikulærløsningen, der vi først prøver med formen $x_n^p = An + B$.

$$4n + 6 = A(n + 2) + B - (An + B) = An + 2A + B - An - B = 2A$$

Dette gikk ikke, så vi går opp én grad og prøver med $x_n^p = An^2 + Bn + C$.

$$\begin{aligned} 4n + 6 &= A(n + 2)^2 + B(n + 2) + C - (An^2 + Bn + C) \\ &= An^2 + 4An + 4A + Bn + 2B + C - An^2 - Bn - C = 4An + 4A + 2B \end{aligned}$$

Vi har nå likningssystemet

$$\begin{cases} 4 = 4A \iff A = 1 \\ 6 = 4A + 2B \iff 6 = 4 + 2B \iff B = 1. \end{cases}$$

Følgelig har vi partiuklærøsningen $x_n^p = n^2 + n$, som er et av svaralternativene.

Alternativ løsningsmetode: Vi setter svaralternativene inn i venstresiden av likningen og ser for hvilket vi oppnår likhet.

$$(a) \quad 4(n + 2) + 6 - (4n + 6) = 4n + 4 + 6 - 4n - 6 = 4$$

$$(b) \quad (n + 2)^2 + (n + 2) - (n^2 + n) = n^2 + 4n + 4 + n + 2 - n^2 - n = 4n + 6$$

Vi ser nå at svaralternativ (b) er en løsning av den inhomogene differenslikningen.

Problem 11. Vi har den karakteristiske likningen

$$r^2 - \sqrt{2}r + 1 = 0,$$

og dermed røttene ved

$$r = \frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{-2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

Nå får vi modulusen

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = 1.$$

5. MIDTVEIS MAT1001 HØSTEN 2012 — LØSNING

Problem 1. Vi har det lineære likningssystemet

$$\begin{cases} x + y + 3z = 6 \\ 3x + 4y - z = 10 \\ -x - 2y + 2z = -3. \end{cases}$$

Ved radreduksjon har vi

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 6 \\ 3 & 4 & -1 & 10 \\ -1 & -2 & 2 & -3 \end{pmatrix} &\stackrel{II+III}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ -1 & -2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \stackrel{III+I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & -1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \\ &\stackrel{I+III}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{I-8\cdot III}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

■

Problem 2. Vi har det lineære likningssystemet

$$\begin{cases} x + 2y + (a+1)z = 4 \\ -x + (a-1)y + 3z = 5 \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

Ved radreduksjon har vi

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 & a+1 & 4 \\ -1 & a-1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} &\stackrel{II+III}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & a & 3 \\ 0 & a & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{I+III}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a & 3 \\ 0 & a & 4 & 6 \end{pmatrix} \\ &\stackrel{III-\frac{1}{a}II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a & 3 \\ 0 & 0 & \frac{4}{a}-a & \frac{6}{a}-3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Hvis vi nå setter $a = 2$ får vi én fri variabel og følgende uendelig mange løsninger. ■

Alternativ løsningsmetode: Vi setter determinanten av koeffisientmatrisen lik null, og bruker teorem 3.13 fra Borge. Vi har at

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & a+1 \\ -1 & a-1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (a+1) \begin{vmatrix} -1 & a-1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (a-1) - 3 - 2 \cdot (-1-3) + (a+1)(-1-(a-1)) = -a^2 + 4 \\ &= (2+a)(2-a) = 0 \iff a = \pm 2. \end{aligned}$$

Vi setter nå inn for a i det opprinnelige system, for å sjekke for hvilket av tilfellene vi får uendelig mange løsninger. Vi starter med $a = -2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ -1 & -3 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{II+III}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{II+I}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Nå har vi et inkonsistent system, og følgelig ingen løsning for $a = -2$. Nå har vi eliminert alle svaralternativene utenom $a = 2$. Vi kan sette inn $a = 2$ i systemet for å dobbeltsjekke at dette er riktig svar, slik:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{II+III}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \stackrel{III-\frac{1}{2}II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{I-II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nå har vi én fri variabel og følgelig har vi uendelig mange løsninger når $a = 2$. ■

Problem 3. Vi har

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} b & 1 & 2 \\ 3 & -1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} b \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 & b \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 \\ 3 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + b \cdot 1 & 3 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + b \cdot 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & b-1 \\ b-1 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Problem 4. Vi finner egenverdiene til M ved

$$\begin{aligned} 0 = \det(M - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(1-\lambda) - 3 = -1 - \lambda + \lambda + \lambda^2 - 3 \\ &= \lambda^2 - 4 = (\lambda + 2)(\lambda - 2) \begin{cases} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Problem 5. Vi multipliserer de gitte vektorene med B for å finne hvilke av de som er egenvektorer for matrisen.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \text{(b)} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \text{(c)} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nå ser vi at $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ er en egenvektor for B med tilhørende egenverdi -2 .

Problem 6. Vi har

$$(1 - 2i)(1 + 2i)(3 - i) = (1 + 2i - 2i + 4)(3 - i) = 5(3 - i) = 15 - 5i,$$

og dermed er imaginærdelen -5 .

Problem 7. Vi har

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(2e^{i\frac{\pi}{3}} - 1 \right) \cdot (e^{i\pi} + i) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) - 1 \right) \cdot (\cos \pi + i \sin \pi + i) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} (1 + \sqrt{3}i - 1)(-1 + i) = i(i - 1) = -1 - i. \end{aligned}$$

Problem 8. Vi har det komplekse tallet $z = i$, og følgelig har vi modulusen ved

$$r = |z| = \sqrt{1^2} = 1.$$

Nå finner vi argumentet ved

$$\sin \theta = 1 \iff \theta = \frac{\pi}{2},$$

slik at $z = e^{i\frac{\pi}{2}}$. Dermed får vi

$$w_0 = e^{\frac{\pi}{2}i \cdot \frac{1}{10}} = e^{\frac{\pi}{20}i}.$$

Videre merker vi oss at $\frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$, som gir

$$w_1 = w_0 \cdot e^{i\frac{\pi}{5}} = e^{i\frac{\pi}{20}} \cdot e^{i\frac{\pi}{5}} = e^{i(\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{20})} = e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}},$$

hvilket er et av svaralternativene. ■

Problem 9. Vi har roten til den karakteristiske likningen ved

$$r - 0.3 = 0 \iff r = 0.3.$$

Som gir den homogene løsningen

$$x_n^h = C(0.3)^n.$$

Videre finner vi partikulærløsningen, der vi prøver med formen $x_n^p = A$.

$$A - 0.3A = 1.4 \iff 0.7A = 1.4 \iff A = \frac{1.4}{0.7} = 2$$

Følgelig har vi partikulærløsningen $x_n^p = 2$, og dermed

$$x_n = x_n^h + x_n^p = C(0.3)^n + 2 \rightarrow 2, \quad \text{når } n \rightarrow \infty. \quad \blacksquare$$

Problem 10. Vi har roten til den karakteristiske likningen ved

$$r - 1 = 0 \iff r = 1.$$

Som gir den homogene løsningen

$$x_n^h = C(1)^n = C.$$

Videre finner vi partikulærløsningen, der vi prøver med formen $x_n^p = An + B$.

$$2n = A(n+1) + B - (An + B) = A$$

Dette går ikke, så vi går nå opp én grad og prøver med $x_n^p = An^2 + Bn + C$.

$$\begin{aligned} 2n &= A(n+1)^2 + B(n+1) + C - (An^2 + Bn + C) \\ &= An^2 + 2An + A + Bn + B + C - An^2 - Bn - C = 2An + A + B \end{aligned}$$

Nå har vi likningssystemet

$$\begin{cases} 2A = 2 \iff A = 1 \\ A + B = 0 \iff B = -A \iff B = -1, \end{cases}$$

slik at partikulærløsningen er gitt ved

$$x_n^p = n^2 - n.$$

Nå følger den generelle løsningen

$$x_n = x_n^h + x_n^p = C + n^2 - n.$$

Videre får vi av initialbetingelsen

$$x_0 = 0 \iff C = 0,$$

slik at den endelige løsningen er gitt ved

$$x_n = n^2 - n.$$

Nå har vi for $n = 20$ at

$$x_{20} = 20^2 - 20 = 380. \quad \blacksquare$$

Problem 11. Vi multipliserer de gitte vektorene fra lineærkombinasjonen med M , for å finne deres tilhørende egenverdier:

$$M \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Følgelig er $\begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix}$ en egenvektor for M med tilhørende egenverdi $\lambda_1 = 1$. Videre har vi at

$$M \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix},$$

slik at $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ er en egenvektor for M med tilhørende egenverdi $\lambda_2 = 1/2$. Nå følger det at

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} &= M^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = M^n \left(\begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right) = M^n \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix} + M^n \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= 1^n \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{2} \right)^n \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 + 4 \left(\frac{1}{2} \right)^n \\ 12 - 2 \left(\frac{1}{2} \right)^n \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

slik at vi får grenseverdien

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12 + 4 \left(\frac{1}{2} \right)^n}{12 - 2 \left(\frac{1}{2} \right)^n} = \frac{12}{12} = 1. \quad \blacksquare$$

Alternativ løsningsmetode: Løsningsmetoden som følger tar litt tid å gjennomføre, og er egentlig mest relevant dersom en ikke får oppgitt lineærkombinasjonen.

Vi har egenverdiene ved

$$\begin{aligned} 0 &= \det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} - \lambda & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} - \lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{2}{3} - \lambda \right) \left(\frac{5}{6} - \lambda \right) - \frac{1}{18} \\ &= \lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{2} = (\lambda - 1) \left(\lambda - \frac{1}{2} \right) \iff \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = \frac{1}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

For λ_1 har vi ved radreduksjon at

$$\begin{aligned} (M - \lambda_1 I \quad O) &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix} \stackrel{I \cdot 3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\stackrel{II - I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \iff x_1 = x_2 \\ x_2 \text{ er fri.} \end{cases} \end{aligned}$$

Vi setter $x_2 = 1$ og får egenvektoren $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Videre for λ_2 , har vi ved radreduksjon at

$$(M - \lambda_2 I \quad O) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & 0 \end{pmatrix} \stackrel{II - I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \iff x_1 = -2x_2 \\ x_2 \text{ er fri.} \end{cases}$$

Vi setter $x_2 = 1$ og får egenvektoren $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Nå ønsker vi å skrive $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ som en lineærkombinasjon av egenvektorene. Med andre ord skal vi finne α_1 og α_2 slik at

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 \iff \begin{pmatrix} 16 \\ 10 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dette gir det lineære likningssystemet

$$\begin{cases} \alpha_1 - 2\alpha_2 = 16 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 10. \end{cases}$$

Ved radreduksjon har vi at

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 16 \\ 1 & 1 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{II-I} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 16 \\ 0 & 3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{I+\frac{1}{3}II} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{cases} \alpha_1 = 12 \\ \alpha_2 = -2. \end{cases}$$

Altså kan vi skrive $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = 12\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2$, som gir

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} &= M^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = M^n (12\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2) = 12M^n \mathbf{v}_1 - 2M^n \mathbf{v}_2 = 12\lambda_1^n \mathbf{v}_1 - 2\lambda_2^n \mathbf{v}_2 \\ &= 12(1)^n \mathbf{v}_1 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n \mathbf{v}_2 = 12\mathbf{v}_1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n 2\mathbf{v}_2 \rightarrow 12\mathbf{v}_1, \quad \text{når } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

slik at

$$\frac{x_n}{y_n} \rightarrow \frac{12}{12} = 1, \quad \text{når } n \rightarrow \infty.$$

■

6. MIDTVEIS MAT1001 HØSTEN 2013 — LØSNING

Problem 1. Vi har det lineære systemet

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ 3x - 2y = 5. \end{cases}$$

Ved radreduksjon får vi

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{II-3I} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow{II \cdot (-1/5), I-II} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{cases} x = 3, \\ y = 2. \end{cases}$$

■

Problem 2. Vi har det lineære systemet

$$\begin{cases} 2x_1 + ax_2 = 3, \\ x_1 - x_2 = 1. \end{cases}$$

Ved radreduksjon har vi at

$$\begin{pmatrix} 2 & a & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{I-2II} \begin{pmatrix} 0 & a+2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

og følgelig har ingen vi løsning for $a = -2$.

■

Alternativ løsningsmetode: Vi setter determinanten av koeffisientmatrisen lik null, og bruker teorem 3.13 fra Borge. Vi har at

$$0 = \begin{vmatrix} 2 & a \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - a \iff a = -2.$$

Følgelig gir $a = -2$ et inkonsistent systemet og dermed ingen løsning.

Merk: $a = -2$ gir enten et system med uendelig mange løsninger eller et inkonsistent system. Her er spørsmålet for hvilken a vi får ingen løsning, og følgelig er den eneste aktuelle kandidaten $a = -2$.

■

Problem 3. Vi har at

$$A \left(\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2 \right) = \frac{1}{2}AX_1 + \frac{1}{2}AX_2 = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}B = B,$$

slik at $(1/2)X_1 + (1/2)X_2$ også er en løsning.

■

Problem 4. Vi har at

$$A - 2B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 & 2 \\ 3 & 4+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

■

Problem 5. Vi har at

$$(-1 \ 1 \ 2) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2) = (3).$$

■

Problem 6. Vi har at

$$\det(M) = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = a \cdot 1 - 3 \cdot 1 = a - 3.$$

■

Problem 7. Vi har det karakteristiske polynomiet ved

$$\det(P - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 1 \\ 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = -(1 + \lambda)(1 - \lambda) = -(1 - \lambda^2) = \lambda^2 - 1.$$

Problem 8. Vi har den karakteristiske likningen til Q ved

$$0 = \det(Q - \lambda I) = \begin{vmatrix} -2 - \lambda & 1 \\ 0 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda + 2)(3 - \lambda) = (\lambda + 2)(\lambda - 3),$$

slik at -2 er en egenverdi for Q .

Problem 9. Null-vektoren er ikke en egenvektor for Q , så riktig svaralternativ er (c).

Problem 10. Vi har at

$$A(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = A\mathbf{v}_1 + A\mathbf{v}_2 = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2,$$

og siden $\lambda_1 \neq \lambda_2$, så får vi ikke $A(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \lambda(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$. Dermed vil ikke $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, være en egenvektor for A .

Problem 11. Vi har at

$$(3 - i)(2 + i) = 6 + 3i - 2i - (-1) = 7 + i,$$

slik at realdelen er 7.

Problem 12. Vi har at

$$\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot 2e^{-i\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{2}e^{i(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2})} = e^0 = 1.$$

Problem 13. Vi har at

$$z = 2e^{i\frac{\pi}{3}} - 1 = 2(\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)) - 1 = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 1 = i\sqrt{3}.$$

Problem 14. Vi har det komplekse tallet $z = -1 - i$, slik at modulusen er gitt ved

$$\rho = |z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

Nå har vi for argumentet at

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \iff \theta = \frac{3\pi}{4} \text{ eller } \theta = \frac{5\pi}{4} \\ \sin(\theta) &= -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \iff \theta = \frac{5\pi}{4} \text{ eller } \theta = \frac{7\pi}{4}, \end{aligned}$$

slik at argumentet er gitt ved $\theta = 5\pi/4$. Følgelig har vi polarformen

$$z = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}.$$

Problem 15. Det er umulig å finne verdien av x_3 , uten noen form for initialbetingelse.

Problem 16. Vi har roten til den karakteristiske likningen ved

$$r - 2 = 0 \iff r = 2,$$

slik at den homogene løsningen er gitt ved $x_n^h = 2^n C$. Videre finner vi partikulærløsningen, der vi først prøver med $x_n^p = A$.

$$-1 = A - 2A = -A \iff A = 1.$$

Nå har vi partikulærløsningen $x_n^p = 1$ og dermed den generelle løsningen

$$x_n = x_n^h + x_n^p = 2^n C + 1.$$

Av den gitte initialbetingelsen har vi

$$1 = x_0 \iff 1 = 2^0 C + 1 \iff C = 0,$$

slik at vi har den endelige løsningen gitt ved

$$x_n = 1.$$

Nå følger det at $x_{20} = 1$. ■

Problem 17. Vi har roten til den karakteristiske likningen ved

$$r - 1 = 0 \iff r = 1,$$

slik at vår homogene løsningen er gitt ved $x_n^h = 1^n C = C$. Videre finner vi partikulærløsningen der vi først prøver med $x_n^p = An + B$:

$$2n + 1 = A(n + 1) + B - (An + B) = A$$

Dette fungerte ikke, så vi går nå opp en grad og prøver med $x_n^p = An^2 + Bn + C$:

$$2n + 1 = A(n + 1)^2 + B(n + 1) + C - (An^2 + Bn + C) = 2An + A + B$$

Nå har vi det lineære systemet

$$\begin{cases} 2A = 2 \iff A = 1 \\ A + B = 1 \iff B = 1 - 1 = 0, \end{cases}$$

og følgelig er partikulærløsningen gitt ved $x_n^p = n^2$. Nå har vi den generelle løsningen

$$x_n = x_n^h + x_n^p = C + n^2.$$

Av den gitte initialbetingelsen har vi

$$0 = x_0 \iff 0 = C + 0^2 \iff C = 0,$$

og dermed er den endelige løsningen gitt ved

$$x_n = n^2,$$

slik at

$$x_5 = 5^2 = 25. \quad \blacksquare$$

Alternativ løsningsmetode: Vi har

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + 2n + 1 \\ x_0 = 0, \end{cases}$$

der vi setter inn verdier for n i uttrykket for x_{n+1} , til vi får x_5 :

$$n = 0: x_1 = x_0 + 2 \cdot 0 + 1 = 1$$

$$n = 1: x_2 = x_1 + 2 \cdot 1 + 1 = 4$$

$$n = 2: x_3 = x_2 + 2 \cdot 2 + 1 = 9$$

$$n = 3: x_4 = x_3 + 2 \cdot 3 + 1 = 16$$

$$n = 4: x_5 = x_4 + 2 \cdot 4 + 1 = 25 \quad \blacksquare$$

7. MIDTVEIS MAT1001 HØSTEN 2014 — LØSNING

Problem 1. Vi har det lineære likningssystemet

$$\begin{cases} x + 2y = 7, \\ 3x - y = 14. \end{cases}$$

Ved radreduksjon får vi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & -1 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow{II-3I} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & -7 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{I \cdot (-1/7), I-2II} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{cases} x = 5, \\ y = 1. \end{cases}$$

■

Problem 2. Vi har

$$2x + 4y = 6 \iff x = 3 - 2y,$$

og dermed har vi løsningene gitt ved

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

■

Problem 3. Vi har ved matrisemultiplikasjon at

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 & 1 \cdot 2 & 1 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 & 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 & 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

■

Problem 4. Vi har det lineære likningssystemet

$$\begin{cases} 2x + ay = 1, \\ (1 - a)x - y = 2. \end{cases}$$

Ved radreduksjon har vi

$$\begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 - a & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{II - \frac{1-a}{2}I} \begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 0 & -1 + \frac{(a-1)a}{2} & 2 - \frac{1-a}{2} \end{pmatrix}$$

Dersom vi nå setter $a = -1$, så får vi at

$$-1 + \frac{(a-1)a}{2} = 0 \quad \text{og} \quad 2 - \frac{1-a}{2} = 1.$$

Følgelig har vi "0 = 1" når $a = -1$, og dermed har vi ingen løsning når $a = -1$. ■

Alternativ løsningsmetode. Vi setter determinanten til koeffisientmatrisen lik null og bruker teorem 3.13 fra Borge. Vi får

$$0 = \det \begin{pmatrix} 2 & a \\ 1 - a & -1 \end{pmatrix} = 2(-1) - (1 - a)a = a^2 - a - 2 = (a - 2)(a + 1) \begin{cases} a = 2, \\ a = -1. \end{cases}$$

Følgelig har vi enten uendelig mange eller ingen løsning når $a = 2$ eller $a = -1$. Eneste av disse verdiene som er et alternativ er $a = -1$, så dette må være svaret. ■

Problem 5. Ved radreduksjon har vi

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{II-2I, III-I} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{III-(3/2)II} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nå har vi fått "0 = -1", og dermed har vi ingen løsning. ■

Problem 6. Vi har matriseproduktet

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 + 2(-3) & 1(-2) + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 4 + 4(-3) & 3(-2) + 4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

Problem 7. Vi har determinanten

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - 2 \det \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + 3 \det \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 8 - 2(-3) + 3(-4) = 2. \quad \blacksquare$$

Problem 8. La M være den oppgitte matrisen. Vi det karakteristiske polynom til M gitt ved

$$\det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1 - \lambda) - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1. \quad \blacksquare$$

Problem 9. La A være matrisen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

som tilfredsstiller

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{11} + a_{12} \\ -a_{21} + a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{12} \\ a_{21} + a_{22} \end{pmatrix}.$$

Nå har vi de lineære likningssystemene

$$\begin{cases} -a_{11} + a_{12} = 1, \\ a_{11} + a_{12} = 0, \end{cases} \quad (*)$$

og

$$\begin{cases} -a_{21} + a_{22} = 0, \\ a_{21} + a_{22} = 1. \end{cases} \quad (**)$$

Løser først (*), ved radreduksjon:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{I_1 \leftrightarrow I_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{I_1 + I_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{cases} a_{11} = -\frac{1}{2}, \\ a_{12} = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Videre løser vi (**), ved radreduksjon:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{I_1 \leftrightarrow I_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{I_1 + I_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{cases} a_{21} = \frac{1}{2}, \\ a_{22} = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Nå har vi funnet A , og har dermed

$$A \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

Problem 10. Vi multipliserer de gitte vektorene med den gitte matrisen, for å finne hvilken av de som ikke er en egenvektor for matrisen:

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+4 \\ -4+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$(b) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2 \\ 4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Vi har nå at $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ ikke er en egenvektor for den oppgitte matrisen. ■

Problem 11. For $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, har vi

$$z^2 = (a + ib)^2 = a^2 + i2ab + (ib)^2 = a^2 + i2ab - b^2.$$

Følgelig har vi realdelen til z^2 som $a^2 - b^2$. ■

Problem 12. Vi har det komplekse tallet $z = -1 + i\sqrt{3}$, og følgelig har vi modulusen ved

$$r = |z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2.$$

Videre finner vi argumentet ved:

$$\left. \begin{array}{l} \cos(\theta) = -\frac{1}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right\} \theta = \frac{2}{3}\pi$$

Nå har vi funnet at polarformen til z er gitt ved:

$$z = 2e^{\frac{2}{3}\pi} \quad \blacksquare$$

Problem 13. Vi har

$$e^{i\frac{\pi}{2}}(1+i) = (\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2))(1+i) = i(1+i) = i-1 \quad \blacksquare$$

Problem 14. Vi har

$$(1+i)^4 = ((1+i)^2)^2 = (1+2i+i^2)^2 = 4i^2 = -4. \quad \blacksquare$$

Problem 15. Vi har differenslikningen

$$x_{n+1} - \frac{1}{2}x_n = 2, \quad x_4 = 8, \quad n \geq 0.$$

Vi har den karakteristiske likningen

$$r - \frac{1}{2} = 0 \iff r = \frac{1}{2},$$

og dermed den homogene løsningen

$$x_n^h = \frac{1}{2^n}c,$$

hvor $c \in \mathbb{R}$ er en konstant. Videre finner vi partikulærløsningen der vi prøver med $x_n^p = A$:

$$2 = x_{n+1}^p - \frac{1}{2}x_n^p = A - \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}A \iff A = 4$$

Nå har vi den generelle løsningen

$$x_n = x_n^h + x_n^p = \frac{1}{2^n}c + 4.$$

Av initialbetingelsen får vi

$$8 = x_4 = \frac{1}{16}c + 4 \iff c = 4 \cdot 16 = 64,$$

og dermed den endelige løsningen

$$x_n = \frac{64}{2^n} + 4.$$

Følgelig har vi

$$x_0 = \frac{64}{1} + 4 = 68.$$

■

Problem 16. Vi har differenslikningen

$$x_{n+1} - 0.9x_n = 10, \quad n \geq 0,$$

med gitt intialbetingelse x_0 . Videre har vi den karakteristiske likningen

$$r - 0.9 = 0 \iff r = 0.9,$$

og dermed har vi

$$x_n^h = 0.9^n c,$$

hvor $c \in \mathbb{R}$ er en konstant. Videre finner vi partikulærløsningen der vi først prøver med $x_n^p = A$:

$$10 = x_n^p - 0.9x_n^p = A - 0.9A = 0.1A \iff A = 100$$

Følgelig har vi den generelle løsningen

$$x_n = x_n^h + x_n^p = 0.9^n c + 100.$$

Videre har vi av intialbetingelsen at

$$x_0 = c + 100 \iff c = x_0 - 100,$$

slik at vi har den endelige løsningen

$$x_n = 0.9^n(x_0 - 100) + 100.$$

Nå følger det at $x_n \rightarrow 100$ når $n \rightarrow \infty$.

■

Problem 17. Vi har differenslikningen

$$x_{n+1} - x_n = n, \quad x_0 = 0, \quad n \geq 0.$$

Videre har vi den karakteristiske likningen

$$r - 1 = 0 \iff r = 1,$$

og dermed den homogene løsningen

$$x_n^h = c,$$

hvor $c \in \mathbb{R}$ er en konstant. Nå finner vi partikulærløsningen der vi først prøver med $x_n^p = An + B$:

$$n = x_{n+1}^p - x_n^p = A(n+1) + B - (An + B) = A$$

Dette fungerte ikke, så vi forsøker med $x_n^p = An^2 + Bn + C$:

$$n = A(n+1)^2 + B(n+1) + C - (An^2 + Bn + C) = 2An + A + B$$

Nå har vi likningssystemet

$$\begin{cases} 2A = 1 \iff A = \frac{1}{2}, \\ A + B = 0 \iff B = -A = -\frac{1}{2}, \end{cases}$$

og dermed den generelle løsningen

$$x_n = x_n^h + x_n^p = c + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n.$$

Videre har vi av initialbetingelsen at

$$0 = x_0 = c,$$

og dermed den endelige løsningen

$$x_n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n.$$

Følgelig har vi

$$x_{20} = \frac{1}{2} \cdot 20^2 - \frac{1}{2} \cdot 20 = 190.$$

■