Løsningsforslag, MAT 1001, høsten 2008

Oppgave 1

a) Substituerer $u = x^2$, $du = 2x\,dx$ og får

$$\int xe^{x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\int e^{x^2}2x\,dx = \tfrac{1}{2}\int e^u du = \tfrac{1}{2}(e^u + c') = \tfrac{1}{2}(e^{x^2} + c') = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}e^{x^2} + c}}$$

hvor vi har satt $c = \frac{1}{2}c'$.

b) Finner generell løsning

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int \frac{1}{x}dx}\int 2e^{x^2}e^{\int \frac{1}{x}dx}dx = e^{-\ln x}\int 2e^{x^2}e^{\ln x}dx \\ &= \tfrac{1}{x}\int 2e^{x^2}\,x\,dx = \tfrac{1}{x}(e^{x^2} + c) = \tfrac{e^{x^2}}{x} + \tfrac{c}{x} \end{aligned}$$

Hvor vi har brukt at $|x| = x$ siden $x > 0$.
Bruker betingelsen $y(1) = \frac{e^1}{1} + \frac{c}{1} = e + c = 0$, som gir $c = -e$. Det betyr at vi har løsning

$$y = \tfrac{e^{x^2}}{x} + \tfrac{-e}{x} = \underline{\underline{\tfrac{e^{x^2}-e}{x}}}$$

Oppgave 2

$$\begin{cases} x - y + z &= 1 \\ 2x - y + 2z &= 1 \\ 2y + \gamma z &= -1 \end{cases}$$

Trekker to ganger første likning fra den andre og får direkte at $y = -1$. Setter vi det inn i den tredje likningen få vi $-2 + \gamma z = -1$, eller $z\gamma = 1$. Det betyr at vi har en løsning for alle $\gamma \neq 0$. Dersom $\gamma \neq 0$ får vi $z = \frac{1}{\gamma}$. Setter vi dette inn i den første likningen får vi $x = 1 + y - z = -\frac{1}{\gamma}$, mao.

$$\underline{\underline{(x, y, z) = (-\tfrac{1}{\gamma}, -1, \tfrac{1}{\gamma}), \quad \gamma \neq 0}}$$

Oppgave 3

a) Det karakteristiske polynomet til likningen er gitt ved $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ som gir $\lambda = \frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Det gir generell løsning

$$\underline{\underline{y = e^{-\frac{1}{2}x}(C\cos(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x) + D\sin(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x))}}$$

b) Setter inn $x = 0$ og får

$$y = e^0(C\cos(0) + D\sin(0)) = C = 0$$

og $y = De^{-\frac{1}{2}x}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)$. Den deriverte

$$y' = D(-\tfrac{1}{2})e^{-\frac{1}{2}x}\sin(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x) + De^{-\frac{1}{2}x}\cos(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x)\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

Innsetting av $x = 0$ gir

$$y'(0) = D(-\tfrac{1}{2})e^0 \sin(0) + De^0 \cos(0) \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{2} = D \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

og videre at $D = 2$, som gir løsning

$$\underline{\underline{y = 2e^{-\frac{1}{2}x} \sin\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)}}$$

Oppgave 4

a) Vi separerer de variable i diff.likningen, anti-deriverer og får

$$-\frac{1}{y} = \int \frac{dy}{y^2} = \int \lambda dt = \lambda t + C$$

som gir løsning

$$\underline{\underline{y = -\frac{1}{\lambda t + C}}}$$

b) Innsetting av $t = 0$ gir $y(0) = -\frac{1}{\lambda \cdot 0 + C} = -\frac{1}{C}$ og det følger at $C = -\frac{1}{N}$. Løsning

$$y = -\frac{1}{\lambda t - \frac{1}{N}} = \underline{\underline{\frac{N}{1 - N\lambda t}}}$$

c) For $t \to \frac{1}{N\lambda}$ vil $1 - N\lambda t \to 0$ og derfor $y \to \infty$. Den søkte verdien er derfor

$$\underline{\underline{t = \frac{1}{N\lambda}}}$$