Løsningsforslag, eksamen i MAT 1001, våren 2009

Oppgave 1

a) Det karakteristiske polynomet er gitt ved $\lambda^2 + \lambda + \frac{1}{4} = 0$, med røtter

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot \frac{1}{4}}}{2} = -\frac{1}{2}$$

I dette tilfellet (to sammenfallende røtter) har vi generell løsning

$$y = Ce^{-\frac{1}{2}x} + Dxe^{-\frac{1}{2}x}$$

b) Setter vi inn for $x = 0$ får vi

$$y(0) = Ce^{-\frac{1}{2}\cdot 0} + D \cdot 0 \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot 0} = C = 1$$

Vi setter inn $C = 1$ og deriverer uttrykket for y

$$y' = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} + De^{-\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}Dxe^{-\frac{1}{2}x}$$

Innsatt $x = 0$ gir dette

$$y'(0) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}\cdot 0} + De^{-\frac{1}{2}\cdot 0} - \frac{1}{2}D \cdot 0 \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot 0} = -\frac{1}{2} + D = -\frac{1}{2}$$

som betyr at $D = 0$. Dermed har vi spesiell løsning $y = e^{-\frac{1}{2}x}$.

Oppgave 2

a) Dette er en separabel differensiallikning og vi finner løsningen ved først å separere de variable

$$\frac{dy}{y} = \frac{dt}{t^2}$$

Vi anti-deriverer begge sider og får

$$\ln y = -\frac{1}{t} + C$$

der vi har tatt bort absoluttverditegnet på y siden den er antatt å være positiv. Vi tar *exp* på begge sider og får

$$y = e^{\ln y} = e^{-\frac{1}{t}+C} = e^{-\frac{1}{t}} \cdot e^C = Ke^{-\frac{1}{t}}$$

hvor vi har erstattet konstanten $K = e^C$.

b) Vi setter inn $y(1) = 1$. Det gir

$$y(1) = Ke^{-\frac{1}{1}} = Ke^{-1} = 1$$

Det betyr at $K = e$ og vi får løsning

$$y = e \cdot e^{-\frac{1}{t}} = e^{1-\frac{1}{t}}$$

Når $t \to \infty$ vil $\frac{1}{t} \to 0$ og $y \to e^1 = e$.

Oppgave 3

a) Dette er en første ordens lineær differensiallikning hvor løsningen er gitt ved formelen

$$v = e^{-\int k dt} \int a e^{\int k dt}\, dt = e^{-kt} \int a e^{kt}\, dt = e^{-kt}(a\frac{1}{k}e^{kt} + C) = \frac{a}{k} + Ce^{-kt}$$

Dette er den generelle løsningen. For å finne den spesielle setter vi inn for initialbetingelsen $v(0) = 0$ som gir

$$v(0) = \frac{a}{k} + Ce^{-k\cdot 0} = \frac{a}{k} + C = 0$$

eller $C = -\frac{a}{k}$ og løsningen blir

$$v = \frac{a}{k}(1 - e^{-kt})$$

b) For å avgjøre hva som skjer etter hvert som tiden går ser vi på grensen for $v(t)$ når $t \to \infty$. Siden $e^{-kt} \to 0$ når $t \to \infty$ får vi at $v(t) \to \frac{a}{k}$ når $t \to \infty$

Oppgave 4

a) Det karakteristiske polynomet er gitt ved $\lambda^2 + \lambda + 1$. Vi finner røttene ved å sette inn i formelen,

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = e^{\pm i \frac{2\pi}{3}}$$

der vi for å komme fra kartesisk form til polarform har brukt at $(-\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = 1$ og at $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ og $\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Dermed kan vi sette inn i formelen for løsning av andre ordens differenslikininger,

$$x_n = C\cos\frac{2\pi n}{3} + D\sin\frac{2\pi n}{3}$$

Så må vi finne en spesiell løsning av den inhomogene likningen. Vi prøver med $x_n = An + B$. Innsetting gir

$$x_{n+2} + x_{n+1} + x_n = A(n+2) + B + A(n+1) + B + An + B = 3An + 3A + 3B = 3n + 3$$

som gir $A = 1$ og $B = 0$, dvs. generell løsning

$$x_n = C\cos\frac{2\pi n}{3} + D\sin\frac{2\pi n}{3} + n$$

b) Vi setter inn for initialverdiene,

$$x_0 = C\cos\frac{2\pi\cdot 0}{3} + D\sin\frac{2\pi\cdot 0}{3} + 0 = C = 1$$
$$x_1 = C\cos\frac{2\pi}{3} + D\sin\frac{2\pi}{3} + 1 = C(-\frac{1}{2}) + D\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

Dette gir $C = 1$ og $D = 0$. Det betyr at den spesielle løsningen er gitt ved

$$x_n = \cos\frac{2\pi n}{3} + n$$

SLUTT