UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1001 — Matematikk 1
Eksamensdag:	Torsdag 13. desember 2012
Tid for eksamen:	09.00 – 13.00
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Ett tosidig A4-ark med valgfri tekst, håndskrevet eller trykt, samt godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

For hver oppgave er det angitt en maksimal poengskår. Til sammen kan du oppnå 67 poeng. Poengene på dagens eksamen legges sammen med den poengsummen du fikk på midtveiseksamen, slik at maksimal samlet poengsum blir 100. Denne summen legges til grunn for karakteren du får i kurset.

Oppgave 1 (12 poeng)

En 2. ordens differenslikning er gitt ved

$$x_{n+2} - 4x_{n+1} + 8x_n = 0$$

Finn den spesielle løsningen av differenslikningen som tilfredsstiller $x_0 = 1$ og $x_1 = 6$.

Løsning. Karakteristisk polynom $\lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0$ med røtter

$$\lambda = 2 \pm 2i = 2\sqrt{2} \cdot e^{\pm i \frac{\pi}{4}}$$

Det gir generell løsning

$$x_n = (2\sqrt{2})^n (C \cos(\frac{\pi}{4} n) + D \sin(\frac{\pi}{4} n))$$

Innsetting,

$$1 = x_0 = (2\sqrt{2})^0 (C \cos 0 + D \sin 0) = C$$

og

$$6 = x_1 = (2\sqrt{2})(\cos\frac{\pi}{4} + D \sin\frac{\pi}{4}) = (2\sqrt{2})(\frac{\sqrt{2}}{2} + D\frac{\sqrt{2}}{2}) = 2 + 2D$$

som gir $D = 2$ og løsning

$$x_n = (2\sqrt{2})^n (\cos(\frac{\pi}{4} n) + 2 \sin(\frac{\pi}{4} n))$$

(Fortsettes på side 2.)

OPPGAVE 2 (12 POENG)

En trekule blir sluppet med i vann. Den synker et stykke ned for så å flyte opp til overflaten. Hastigehten til kula i vannet på vei nedover er bestemt av likningen

$$v' = -a(v+2)$$

hvor $a = \ln 3 - \ln 2$. Ved tiden $t = 0$ setter vi farten til kula til å være $v(0) = 1$. Finn et uttrykk for hastigheten $v = v(t)$ av kula mens den er på vei nedover i vannet.

Løsning. Løser som en separabel likning,

$$\int \frac{dv}{v+2} = -\int a\,dt$$

Det gir $\ln|v+2| = -at + C$. Setter inn for $v(0) = 1$, $\ln|1+2| = \ln 3 = C$. Det gir

$$|v+2| = e^{-at+\ln 3} = 3e^{-at}$$

eller $v(t) = 3e^{-at} - 2$. Setter vi inn for $a = \ln 3 - \ln 2$ får vi $v(t) = 3(\frac{2}{3})^t - 2$.

OPPGAVE 3

a) (7 poeng) Skriv uttrykket $\cos(\frac{1}{2}t) + \sin(\frac{1}{2}t)$ på formen $A\cos(\omega t - \phi)$.

b) (12 poeng) Feltstudier på en liten tropisk øy i Stillehavet viser at bestanden $z = z(t)$ av en bestemt dyreart kan skrives $z(t) = y(t) + 5\cdot 10^3$ der $y(t)$ oppfyller en differensiallikning

$$y'' + \frac{1}{4}y = 0$$

På et gitt tidspunkt, $t = 0$ er bestanden $z(0) = 6\cdot 10^3$, dvs. $y(0) = 10^3$, og samme observasjon gjør vi ved tiden $t = \pi$, altså $z(\pi) = 6\cdot 10^3$ og $y(\pi) = 10^3$. Løs differensiallikningen og finn et uttrykk for $y(t)$ og dermed også for $z(t)$.

Løsning. a) Vi har $A = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$. Videre må $\omega = \frac{1}{2}$, og $\cos\phi = \sin\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, dvs. $\phi = \frac{\pi}{4}$, og derfor

$$\cos(\frac{1}{2}t) + \sin(\frac{1}{2}t) = \sqrt{2}\cos(\frac{1}{2}t - \frac{\pi}{4})$$

b) Karakteristisk polynom $r^2 + \frac{1}{4} = 0$ med røtter $r = \pm i\frac{1}{2}$. Det gir løsning

$$y(t) = C\cos(\frac{1}{2}t) + D\sin(\frac{1}{2}t)$$

Setter vi inn for $y(0)$ får vi $C = 10^3$, og for $y(\pi) = C\cos(\frac{\pi}{2}) + D\sin(\frac{\pi}{2}) = D = 10^3$, mao.

$$y(t) = 10^3(\cos(\frac{1}{2}t) + \sin(\frac{1}{2}t))$$

eller ved å bruke a),

$$y(t) = \sqrt{2}\cdot 10^3\cdot\cos(\frac{1}{2}t - \frac{\pi}{4})$$

(Fortsettes på side 3.)

Dette gir

$$z(t) = \sqrt{2} \cdot 10^3 \cdot \cos\left(\frac{1}{2}t - \frac{\pi}{4}\right) + 5 \cdot 10^3$$

Oppgave 4 (12 poeng)

En første ordens lineær differensiallikning er gitt ved

$$xy' - 2y = -1$$

hvor $y(1) = \frac{3}{2}$. Løs likningen og finn et uttrykk for $y = y(t)$.

Løsning. Deler vi likningen med x får vi

$$y' - \frac{2}{x}y = -\frac{1}{x}$$

med løsning

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{\int \frac{2}{x}dx} \int e^{-\int \frac{2}{x}dx}\left(-\frac{1}{x}\right) dx = -x^2 \int \frac{1}{x^3}\, dx = -x^2\left(-\frac{1}{2x^2} + C\right) \\ &= \frac{1}{2} - Cx^2 \end{aligned}$$

Innsatt $\frac{3}{2} = y(1) = \frac{1}{2} - C$ gir $C = -1$ og

$$y(x) = \frac{1}{2} + x^2$$

Oppgave 5 (12 poeng)

Torricellis lov sier at vannmengden som renner ut av et hull i bunnen på en tank pr. tidsenhet er proporsjonal med kvadratroten av høyden av vannet i tanken og arealet av hullet. Vi tenker oss en sylindrisk tank med grunnflate $A = 100$ og et hull med areal $a = 1$. Vi lar $y(t)$ være vannhøyden i tanken ved tiden t. Det gir oss en differensiallikning

$$\frac{d}{dt}(100 \cdot y) = -k\sqrt{y}, \qquad k > 0$$

Løs likningen når vi antar at vannhøyden til å begynne med var $y(0) = h$. Hva skjer med vannhøyden når tiden t går mot uendelig?

Løsning. Dette er en separabel likning. Vi separerer variable og integrerer

$$2\sqrt{y} = \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = -\frac{k}{100}dt = -\frac{k}{100}t + C$$

Dette gir

$$4y = \left(-\frac{k}{100}t + C\right)^2$$

eller

$$y = \frac{1}{4}\left(-\frac{k}{100}t + C\right)^2$$

Betingelsen $y(0) = h$ gir $h = \frac{1}{4}(0 + C)^2$ eller $C = 2\sqrt{h}$, mao.

$$y = \left(-\frac{k}{200}t + \sqrt{h}\right)^2$$

(Fortsettes på side 4.)

På et tidspunkt vil alt vannet ha rent ut, dvs. vannhøyden $y = 0$. Etter dette vil selvfølgelig vannhøyden fortsette å være 0, også når tiden t går mot uendelig. Løsningen vi har funnet for diff.likningen er kun gyldig så lenge det er vann i tanken.

SLUTT