UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MAT1001 — Matematikk 1
Eksamensdag:	Torsdag 11. desember 2014.
Tid for eksamen:	09:00 – 13:00.
Oppgavesettet er på 5 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Ett tosidig A4-ark med valgfri tekst, håndskrevet eller trykt, samt godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

For hver oppgave er det angitt en maksimal poengskår. Til sammen kan du oppnå 61 poeng. Poengene på dagens eksamen multipliseres med 66/61 og legges sammen med den poengsummen du fikk på midtveiseksamen, slik at maksimal samlet poengsum blir 100. Denne summen legges til grunn for karakteren du får i kurset.

Oppgave 1 (8 poeng)

Et lineært ligningssystem er gitt ved at

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x - y + 2z &= 0 \\ 2x + \alpha y + 3z &= \alpha + 1, \end{aligned}$$

der α er en konstant. Finn α slik at ligningssystemet har uendelig mange løsninger. Finn alle løsningene i dette tilfellet.

Løsningsforslag: Vi omformer til trappeform

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & \alpha & 3 & \alpha+1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & \alpha-2 & 1 & \alpha-1 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1+\frac{\alpha-2}{2} & \alpha-1-\frac{\alpha-2}{2} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha & \alpha \end{pmatrix}.$$

Siste linje sier at $\alpha z = \alpha$, og dersom $\alpha = 0$ blir dette $0 = 0$, og dermed uendelig mange løsninger. Vi substituerer tilbake for å finne en

(Fortsettes på side 2.)

parameterframstilling av disse.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Dermed blir

$$x = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}z, \quad y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z,$$

og z kan være hva som helst. Vi setter $z = 2t$, der $t \in \mathbb{R}$, og får løsningen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - 3t \\ \frac{1}{2} + t \\ 2t \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Oppgave 2 (8 poeng)

Finn den generelle løsningen på differensligningen

$$2x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 1.$$

Hva blir $\lim_{n\to\infty} x_n$?

Løsningsforslag: Karakteristisk polynom blir $2\lambda^2 - 2\lambda + 1$ med røtter $\lambda = (1 \pm i)/2 = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\pm i\pi/4}$. En spesiell løsning på den inhomgene ligningen er $x_n^{\text{inhomo}} = 1$. Derfor blir den generelle løsningen

$$x_n = A(\sqrt{2})^{-n}\cos(n\pi/4) + B(\sqrt{2})^{-n}\sin(n\pi/4) + 1.$$

Når n blir stor er $(\sqrt{2})^{-n}$ liten, derfor blir $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$.

Oppgave 3 (8 poeng)

En funksjon f tilfredstiller

$$f'(x) = e^x \sin(x), \qquad f(0) = 1.$$

Finn $f(x)$.

Løsningsforslag: Vi bruker delvisintegrasjon,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int e^x \sin(x)\,dx \\ &= e^x\sin(x) - \int e^x\cos(x)\,dx \\ &= e^x\sin(x) - e^x\cos(x) - \int e^x\sin(x)\,dx \\ &= e^x\sin(x) - e^x\cos(x) - f(x) + C. \end{aligned}$$

(Fortsettes på side 3.)

Derfor blir $f(x) = \frac{e^x}{2}(\sin(x) - \cos(x)) + C$, og betingelsen $f(0) = 1$ gir $C = 3/2$.

Oppgave 4

Vi ser på differensialligningen

$$y'' + 2y' + y = x. \tag{1}$$

4a (4 poeng)

Vis at $y_1(x) = x - 2$ er en løsning av (1).

Løsningsforslag: Vi setter inn,

$$(x-2)'' + 2(x-2)' + (x-2) = 0 + 2 + x - 2 = x.$$

4b (6 poeng)

Finn den generelle løsningen på den homogene ligningen

$$y'' + 2y' + y = 0,$$

og kall denne y_2.

Løsningsforslag: Karakteristisk polynom er $(r+1)^2$ som har én rot $r = -1$. Derfor blir løsningen

$$y_2(x) = Ae^{-x} + Bxe^{-x}.$$

4c (5 poeng)

Vis at $y = y_1 + y_2$ løser (1) (Du trenger ikke bruke uttrykket for y_2 funnet i **4b** for dette).

Løsningsforslag: Vi setter inn,

$$(y_1 + y_2)'' + 2(y_1 + y_2)' + (y_1 + y_2) = y_1'' + 2y_1' + y_1 + y_2'' + 2y_2' + y_2 = x + 0.$$

4d (5 poeng)

Finn løsningen på (1) som er slik at $y(0) = y'(0) = 0$.

(Fortsettes på side 4.)

Løsningsforslag: Vi har at

$$
\begin{aligned}
y(x) &= Ae^{-x} + Bxe^{-x} + x - 2 \\
y'(x) &= -Ae^{-x} - Bxe^{-x} + Be^{-x} + 1,
\end{aligned}
$$

slik at $y(0) = 0 = A - 2$ og $y'(0) = 0 = -A + B + 1$. Dette gir at $A = 2$ og $B = 1$. Altså

$$y(x) = 2e^{-x} + xe^{-x} + x - 2.$$

Oppgave 5

På et fly som flyr med hastighet $v(t)$ virker en motstandskraft som er proporsjonal med v^2, og har motsatt retning. I tillegg virker en skyvekraft fra motoren. Vi kaller denne kraften F, og vi antar at F er konstant. Da sier Newtons 2. lov at

$$mv' = F - kv^2,$$

der m er massen til flyet. Vi antar at $m = m(t) = m_0 - t$, siden flyet bruker opp brennstoff med en konstant rate mens det flyr.

5a (9 poeng)

Anta i resten av oppgaven at $F = 4$, $k = 1$, $m_0 = 1$ og $v(0) = 0$. Finn $v(t)$.

Løsningsforslag: Vi får en separabel differensialligning,

$$\int \frac{dv}{4 - v^2} = \int \frac{dt}{1 - t}.$$

Integralet til venstre løser vi med delbrøkoppspalting,

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dv}{4 - v^2} &= \frac{1}{4} \int \frac{1}{2 + v} + \frac{1}{2 - v}\, dv \\
&= \frac{1}{4} \ln\left(\frac{2 + v}{2 - v}\right).
\end{aligned}
$$

Integralet til høyre blir

$$\int \frac{dt}{1 - t} = -\ln(1 - t) + C.$$

Setter vi disse like blir

$$\frac{2 + v}{2 - v} = \frac{C}{(1 - t)^4}.$$

Nå kan vi bruke initialbetingelsen $v(0) = 0$ og få at $C = 1$. Deretter løser vi for v,

$$v(t) = 2\frac{1 - (1 - t)^4}{1 + (1 - t)^4}.$$

(Fortsettes på side 5.)

5b (8 poeng)

Anta at halvparten av den initielle vekten til flyet er drivstoff, derfor vil alt drivstoffet være oppbrukt når $t = 1/2$, og dermed stopper motoren og $F = 0$. Forklar at for $t > 1/2$ så vil hastigheten tilfredsstille

$$\frac{1}{2}v' = -v^2,$$

og finn en formel for hastigheten til flyet for $t > 1/2$.

Løsningsforslag: For $t > 1/2$ vil ikke flyet miste drivstoff og $m = 1/2$, og den eneste kraften som virker på flyet er luftmotstanden. Da gir Newtons 2. lov at

$$\frac{1}{2}v' = -v^2, \ t > 1/2, \quad v(1/2) = \frac{30}{17}.$$

Dette er en separabel ligning som gir at

$$-\int \frac{dv}{v^2} = \frac{1}{v} = 2t + C.$$

Setter vi inn $t = 1/2$, får vi at $\frac{17}{30} = 1 + C$, og $C = -\frac{13}{30}$. Dette gir at

$$v(t) = \frac{1}{2t - 13/30}, \quad t > \frac{1}{2}.$$

SLUTT