

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i MAT1001 — Matematikk 1
Eksamensdag: Torsdag 11. desember 2014.
Tid for eksamen: 09:00 – 13:00.
Oppgavesettet er på 2 sider.
Vedlegg: Ingen.
Tillatte hjelpemidler: Ett tosidig A4-ark med valgfri tekst,
 håndskrevet eller trykt, samt godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

For hver oppgave er det angitt en maksimal poengskår. Til sammen kan du oppnå 66 poeng. Poengene på dagens eksamen legges sammen med den poengsummen du fikk på midtveiseeksamen, slik at maksimal samlet poengsum blir 100. Denne summen legges til grunn for karakteren du får i kurset.

Oppgave 1 (8 poeng)

Et lineært ligningssystem er gitt ved at

$$\begin{aligned}x + y + z &= 1 \\x - y + 2z &= 0 \\2x + \alpha y + 3z &= \alpha + 1,\end{aligned}$$

der α er en konstant. Finn α slik at ligningssystemet har uendelig mange løsninger. Finn alle løsningene i dette tilfellet.

Oppgave 2 (8 poeng)

Finn den generelle løsningen på differensligningen

$$2x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 1.$$

Hva blir $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$?

Oppgave 3 (8 poeng)

En funksjon f tilfredstiller

$$f'(x) = e^x \sin(x), \quad f(0) = 1.$$

Finn $f(x)$.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 4

Vi ser på differensialligningen

$$y'' + 2y' + y = x. \quad (1)$$

4a (4 poeng)

Vis at $y_1(x) = x - 2$ er en løsning av (1).

4b (6 poeng)

Finn den generelle løsningen på den homogene ligningen

$$y'' + 2y' + y = 0,$$

og kall denne y_2 .

4c (5 poeng)

Vis at $y = y_1 + y_2$ løser (1) (Du trenger ikke bruke uttrykket for y_2 funnet i **4b** for dette).

4d (5 poeng)

Finn løsningen på (1) som er slik at $y(0) = y'(0) = 0$.

Oppgave 5

På et fly som flyr med hastighet $v(t)$ virker en motstandskraft som er proporsjonal med v^2 , og har motsatt retning. I tillegg virker en skyvekraft fra motoren. Vi kaller denne kraften F , og vi antar at F er konstant. Da sier Newtons 2. lov at

$$mv' = F - kv^2,$$

der m er massen til flyet. Vi antar at $m = m(t) = m_0 - t$, siden flyet bruker opp brennstoff med en konstant rate mens det flyr.

5a (8 poeng)

Anta i resten av oppgaven at $F = 4$, $k = 1$, $m_0 = 1$ og $v(0) = 0$. Finn $v(t)$.

5b (9 poeng)

Anta at halvparten av den initielle vekten til flyet er drivstoff, derfor vil alt drivstoffet være oppbrukt når $t = 1/2$, og dermed stopper motoren og $F = 0$. Forklar at for $t > 1/2$ så vil hastigheten tilfredsstillende

$$\frac{1}{2}v' = -v^2,$$

og finn en formel for hastigheten til flyet for $t > 1/2$.

SLUTT